(11) 15/5/17

[This question paper contains 16 printed pages]

DESHBANDHU COLLEGE LIBRARY Kalkaji, New Delhi-19

Your Roll No. : .....

Sl. No. of Q. Paper : **8687** **GC-4**

Unique Paper Code : 12271201

Name of the Course : **B.A. (Hons.) Economics (Choice Based Credit System)**

Name of the Paper : Introductory Macroeconomics

Semester : II

Time : 3 Hours ***Maximum Marks : 75***

Instructions for Candidates :

(a) Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.

इस प्रश्न-पत्र के प्राप्त होने पर तुरंत शीर्ष पर अपना रोल नंबर लिखें।

(b) **All** questions are to be attempted.

सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(c) **Part (A)** of each question is compulsory.

प्रत्येक प्रश्न का **भाग (A)** अनिवार्य है।

(d) Answer may be written either in **English** or in **Hindi**; but the same medium should be used throughout the paper.

इस प्रश्न-पत्र का उत्तर **अंग्रेजी** या **हिंदी** किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तर एक ही भाषा में होने चाहिए।

P.T.O.

1. **Part–A** is compulsory. Do any **2** out of parts **B**, **C** and **D**.

   भाग–A अनिवार्य है। भाग **B, C** व **D** में कोई **2** करें।

   (A) The following data is given for an economy for the year 2015 :

   समय अवधि 2015 के लिए एक अर्थव्यवस्था के लिए निम्नलिखित आँकड़े दिए गए हैं :

   (i) X purchases used house from Y for $ 100, 000 and the real estate agent charges 2% commission each from X and Y.

   $ 100, 000 में 'X' ने 'Y' से एक पुराना मकान खरीदा तथा डीलर ने X व Y दोनों से 2 प्रतिशत शुल्क लिया।

   (ii) Government's cost of providing public education is $ 20 billion.

   सार्वजनिक शिक्षा प्रदान करने का सरकारी लागत $ 20 बिलियन है।

   (iii) Change in inventory investment $ 10 billion.

   इनवेन्टरी निवेश में परिवर्तन $ 10 बिलियन है।

   (iv) A pays a market price of $ 200,000 to purchase a newly constructed house in the year 2015.

   A, 2015 में निर्मित एक नया मकान खरीदने के लिए $ 200,000 बाजार कीमत चुकाता है।

   (v) Government's cost of providing national defense $ 20 billion.

   राष्ट्रीय सुरक्षा प्रदान करने का सरकारी लागत $ 20 बिलियन है।

Using Product approach to measuring GDP, calculate the total contribution of the above economic activities to GDP for the year 2015. How government's contribution to GDP is measured ? 5

GDP मापने की उत्पाद विधि का उपयोग करके, वर्ष 2015 के लिए उपरोक्त सभी आर्थिक क्रियाओं के GDP में सहयोग की गणना करें। क्या सरकार का GDP में सहयोग लागत पर मापा जाता है, क्यों या क्यों नहीं?

(B) (i) Compute government's net income, GDP, and GNP from following data (all figures are in billion dollars).

Taxes = 500

Transfers = 100

Interest payments = 100

Private disposable income = 1000

Net factor payments from abroad = 50 3

निम्नलिखित आँकड़ों से सरकार की शुद्ध आय GDP व GNP की गणना करें। (सभी आँकड़े बिलियन डालर में है)

कर = 500

हस्तांतरण = 100

ब्याज भुगतान = 100

निजी प्रोज्य आय = 1,000

विदेशों से शुद्ध साधन भुगतान = 50

(ii) Write the national income identity for an open economy and show that net exports shall be positive if the domestic spending is less than national income (Y). 2

एक खुली अर्थव्यवस्था के लिए राष्ट्रीय आय समीकरण लिखें तथा दर्शाइए की शुद्ध निर्यात धनात्मक होगा यदि घरेलू व्यय, राष्ट्रीय आय (Y) से कम होगा।

(C) (i) What is the fundamental balance of payments identity ? Suppose country A forgives $ 100,000 in debt owed to it by the Country B, Show how are country A's balance of payments accounts affected ? 3

"आधारभूत भुगतान शेष समीकरण क्या है ? मान लीजिए कि देश A $ 100,000 का ऋण माफ करता है, जो उसे देश B से लेना है, दर्शाइए की देश A का भुगतान शेष खाता कैसे प्रभावित होगा ?

(ii) "A country's current account balance equals its change in net foreign wealth". Do you agree? Discuss. 2

"एक देश का चालू खाता शेष उसकी शुद्ध विदेशी सम्पत्ति में बदलाव के बराबर है।" क्या आप सहमत हैं ? व्याख्या करें।

(D) (i) What is GDP deflator ? How is it different from consumer price index ? How does CPI inflation overstate the increases in cost of living ? 3

GDP अपस्फीति कारक क्या है ? यह उपभोक्ता कीमत सूचकांक से कैसे भिन्न है ? कैसे CPI स्फीति, जीवन की लागत में वृद्धि को बढ़ाकर बताती है ?

(ii) Define national savings in terms of various components. 2

विभिन्न घटकों के रूप में राष्ट्रीय बचतों को परिभाषित करें ।

2. **Part A** is Compulsory, Do any **3** out of **part B, C, D** and **E.**

भाग- **A** अनिवार्य है। भाग **B, C, D** व **E** में से कोई **3** करें।

(A) What is Fisher effect ? Calculate ex-ante and ex-post real interest rates from the data given below :

फिशर प्रभाव क्या है ? नीचे दिए गए आँकड़ों से एक्स-ऐंटे व एक्स-पोस्ट वास्तविक ब्याज दरों की गणना करें।

Variable/Year चर/वर्ष	**2013**	**2014**
Nominal interest rate संकेतिक ब्याज दर	0.15(15%)	0.15(15%)
Expected inflation अपेक्षित स्फीति	0.05(5%)	0.10(10%)
Actual inflation वास्तविक स्फीति	0.06(6%)	0.09(9%)

(B) (i) "What are determined in bond markets are not interest rates, but bond prices". In this context distinguish between expansionary and contractionary open market operations. How do they affect the balance sheet of central bank and bond prices and interest rates ? 5

"एक बाँड बाज़ार में जो निर्धारित होता है वह ब्याज दरें नहीं होती बल्कि बाँड की कीमत होती है" इस संदर्भ में विस्तारक व संकुचित खुले बाज़ार प्रक्रियाओं के बीच भेद करें। यह एक केन्द्रीय बैंक की बैलेन्स शीट व बाँड कीमतों तथा ब्याज दरों को कैसे प्रभावित करती है ?

(ii) Suppose that money demand is given by M^d = \$ Y (0.35-i), where \$ Y is 100. Also, suppose that the supply of money is \$ 20. Assume equilibrium in financial markets. 2

मान लीजिए की मुद्रा माँग M^d = \$ Y (0.35-i), द्वारा दी गई, जहाँ \$ Y 100 है। यह भी मानिए कि मुद्रा की पूर्ति \$ 20 है। वित्तीय बाज़ार में सन्तुलन है।

(a) What is the interest rate ?

ब्याज दर क्या है ?

(b) If the central bank wants to increase interest rate by 10 percentage points (i.e., from say 2 to 12%) at what level it should set the supply of money ?

यदि केन्द्रीय बैंक ब्याज दर को 10 प्रतिशत बिन्दुओं (जैसे 2 से 12 प्रतिशत) से बढ़ाना चाहता है तो उसे मुद्रा की पूर्ति किस स्तर पर स्थित करनी चाहिए ?

(C) (i) Explain how the demand for and supply of central bank money determines the equilibrium interest rate in an economy with currency and checkable deposits ? Explain using formal analysis and diagrams. 5

व्याख्या करें कैसे चैकेबल जमाएँ व करेन्सी के साथ एक अर्थव्यवस्था में मुद्रा के लिए माँग व केन्द्रीय बैंक मुद्रा की पूर्ति संतुलन ब्याज दर निर्धारित करती है ?

(ii) Let's consider a special case where people hold only checkable deposits, which means currency to money demand ratio (c) = 0. Assume that reserves to deposits ratio (θ) = 0.1 (10%). 2

एक विशेष स्थिति पर विचार करें जहाँ लोग केवल चैकेबल जमाएँ रखते हैं, जिसका अर्थ यह है कि करेन्सी जमाएँ अनुपात (c) = 0 है। मान लीजिए की रिजर्व जमाएँ अनुमात (θ) = 0.1 (10%) है।

(a) What is the value of money multiplier ?

मुद्रा गुणक का मूल्य क्या है ?

(b) Suppose the central bank conducts open market purchase of bonds worth $ 100 Billion. What will be its impact on overall supply of money ?

मान लीजिए कि केन्द्रीय बैंक $ 100 बिलियन मूल्य के बाँण्ड्स का खुले बाज़ार खरीद करता है। इसका मुद्रा की कुल पूर्ति पर क्या प्रभाव पड़ेगा ?

(D) (i) Suppose the Government chooses a constant rate of nominal money growth and maintains that forever, how much Seignorage will this constant rate of nominal money growth generate ? Discuss the empirical relation between Seignorage and nominal money growth ? Explain using formal analysis and diagrams. 5

मान लीजिए कि सरकार सांकेतिक मुद्रा वृद्धि की स्थायी दर का चुनाव करती है तथा सदैव के लिए उसे बनाए रखती है। यह सांकेतिक मुद्रा वृद्धि की स्थायी दर कितना सिनौरेज़ सृजित करेगी ? सांकेतिक मुद्रा वृद्धि व सिनौरेज़ के बीच अनुभवात्मक संबंध की व्याख्या करें। औपचारिक विश्लेषण व चित्र का उपयोग करके व्याख्या करें।

(ii) Suppose the Government is running a budget deficit equal to 10% of real income and decides to finance it through Seignorage, so deficit/Y = Seignorage/Y = 0.10. Suppose people hold real balance equal to 1 month of income, so (M/P)/Y = 1. What should be the nominal money growth per month ? 2

मान लीजिए की सरकार का बजट घाटा वास्तविक आय के 10% के बराबर है तथा सरकार इसका वित्तीय सिनौरेज़ द्वारा करने का निर्णय लेती है, तो घाटा/ Y = सिनौरेज़/ Y = 0.10 है। मान लीजिए कि लोग वास्तविक शेष 1 महीने की आय के बराबर रखते हैं। प्रति माह सांकेतिक मुद्रा वृद्धि क्या होनी चाहिए ?

(E) (i) How does hyperinflation affect economic activity ? Explain. 5

हाइपर स्फीति, आर्थिक क्रियाओं को कैसे प्रभावित करती है ? व्याख्या करें।

(ii) A bond promises to pay $ 100 in one year. What is the interest rate on the bond if the price of the bond is $ 75 and $ 85 ? What is the relationship between the price of the bond and interest rates ? 2

एक बाँड एक वर्ष में $ 100 देने का वादा करता है यदि बाँड की कीमत $ 75 व $ 85 हो तो बाँड पर ब्याज दर क्या होगी ? बाँड की कीमत व ब्याज दर के बीच क्या संबंध है ?

3. **Part A** is Compulsory, Do any **3** out of part **B**, **C**, **D** and **E**.

भाग- A अनिवार्य है। भाग **B, C, D** व **E** में से कोई **3** करें।

(A) (i) What is crowding out ? Explain with the help of a suitable diagram. 3

क्राउडिंग ऑउट क्या है ? उपयुक्त चित्र की सहायता से समझाइए।

(ii) Consider the following Classical model ;

Money supply = 1,000, Velocity of Money = 3 and Output = 1,500

Derive aggregate demand curve from the above information and plot it. 2

निम्नलिखित परम्परावादी मॉडल पर विचार करें।

मुद्रा पूर्ति = 1,000, मुद्रा का वेग = 3 तथा उत्पाद = 1,500

उपरोक्त सूचना से समग्र मांग वक्र व्युत्पन्न करें तथा एक चित्र में कीमत स्तर व उत्पाद को दर्शाइए।

(B) (i) "In the classical model, a cut in the marginal income tax rate has supply side effects". Discuss the above statement with in the Classical model. How output, employment and price level are affected ? 5

परम्परावादी मॉडल में, सीमांत आय कर दर में कटौती से पूर्ति पक्ष प्रभाव होता है" परम्परावादी मॉडल के अन्दर उपरोक्त कथन की व्याख्या करें। उत्पाद, रोज़गार व कीमत स्तर कैसे प्रभावित होते हैं ?

(ii) Define velocity of money. What factors determine the velocity of money in the classical system ? What is the relationship between velocity and Cambridge coefficient (transactions demand for money to income ratio) ? 3

मुद्रा वेग को परिभाषित करें। परम्परावादी प्रणाली में कौन से कारक मुद्रा के वेग को निर्धारित करते हैं ? वेग व कैम्ब्रिज गुणक के बीच क्या सम्बंध है (लेन-देन के लिए मुद्रा की माँग व आय अनुपात)

(iii) Consider the following Keynesian model :

Full employment output (Y*) = 1,000, Actual output (Y) = 1,200, Government purchase of goods and services (G) = 200, Transfers (TR) = 50 and Taxes = 0.25 Y (25%). Compute cyclical component of budget surplus. 2

निम्नलिखित कीनेसियन मॉडल पर विचार करें :

मान लीजिए पूर्ण रोजगार उत्पाद (Y*) = 1,000, वास्तविक उत्पाद (Y) = 1,200, वस्तु व सेवाओं की सरकारी खरीद (G) = 200, हस्तांतरण (TR) = 50 तथा कर = 0.25 Y (25%) बजट आधिक्य के चक्रीय घटक क्या है ?

(C) (i) Suppose Government cuts (autonomous) income taxes : Show in the IS-LM model the impact of tax cut under two assumptions (a) the government keeps interest rate constant through an accommodating monetary policy (b) the money supply remains unchanged. Explain the difference in results. 5

मान लीजिए सरकार आय करों में कटौती (स्वचालित) करती है IS-LM मॉडल में दो मान्यताओं के अन्तर्गत कर कटौती के प्रभाव को दर्शाइए (a) एक समयोजित मौद्रिक नीति के द्वारा सरकार ब्याज दर को स्थायी रखती है (b) मुद्रा की पूर्ति अपरिवर्ततीत रहती है। परिणाम में अंतर की व्याख्या करें।

(ii) What is liquidity trap ? Is monetary policy ineffective in this case ? 3

तरलता जाल क्या है ? क्या इस स्थिति में मौद्रिक नीति अप्रभावी है ?

(iii) Consider the following Keynesian model : 2

Marginal propensity to consume out of disposable income (c) = 0.8, Taxes (TA) = 0.25 Y (25%), equilibrium level income (Y_0) = 600. Suppose Government decides to reduce transfer payments (TR) by 10 ($\Delta TR = -10$), but to increase government purchases of goods and services by an equal amount ($\Delta G = +10$) (i.e., $\Delta G = -\Delta TR$). Find :

(a) the change in equilibrium level of income and

(b) change in budget surplus.

निम्नलिखित कीनेसियन मॉडल पर विचार करें :

प्रोज्य आय में से सीमांत उपभोग प्रवृति (c) = 0.8 है, कर (TA) = 0.25 Y (25%) आय का संतुलन स्तर (Y_0) = 600 है। मान लीजिए कि सरकार हस्तांतरण भुगतान TR को 10 से घटाना ($\Delta TR = -10$) चाहती है बल्कि वस्तु व सेवाओं की सरकारी खरीद को बराबर राशि से बढ़ाना चाहती है ($\Delta G=+10$) (अर्थात $\Delta G=-\Delta TR$) ज्ञात करें :

(a) आय के संतुलन स्तर में बदलाव तथा

(b) बजट आधिक्य में बदलाव।

(D) (i) Within the IS–LM model of income determination, explain how interest rate and output adjust towards equilibrium in case of :

(a) Excess supply of goods and excess demand for money

(b) Excess demand for goods and excess supply of money. How the assumption of rapid money market adjustment affects the adjustment process. Explain using diagrams.

आय निर्धारण के IS–LM मॉडल के अंतर्गत, समझाइए कैसे इन स्थितियों में ब्याज दर व उत्पादन संतुलन की ओर समायोजित होते हैं

(a) वस्तुओं की अत्याधिक पूर्ति व मुद्रा के लिए अत्याधिक माँग

(b) वस्तुओं की अत्यधिक माँग व मुद्रा की अत्यधिक पूर्ति किस प्रकार तीव्र मुद्रा बाज़ार समायोजन की मान्यता समायोजन विधि को प्रभावित करती है। चित्र का उपयोग करके व्याख्या करें।

(ii) What is an investment subsidy ? What are its effect on equilibrium level of income, interest rate, consumption and investment ? Explain using diagram. 3

निवेश अनुदान क्या है ? इसका आय के संतुलन स्तर, ब्याज दर, उपभोग व निवेश पर क्या प्रभाव पड़ता है ? चित्र का उपयोग करके व्याख्या करें।

(iii) Consider the following Keynesian model : 2

Marginal propensity to consume out of disposable income (c) = 0.8

Taxes = 0.25 Y (25%)

Compute the change in budget surplus followed by an increase in government spending by $ 10 billion ? If the initial budget surplus is $ 3.75 billion, what shall be the new budget surplus ?

निम्नलिखित कीनेसियन मॉडल पर विचार करें :

प्रोज्य आय में से सीमांत उपभोग प्रवृति (c) = 0.8 कर =0.25Y (25%)

सरकारी व्यय में $ 10 बिलियन की वृद्धि के बाद बजट आधिक्य में परिवर्तन की गणना करें। यदि आरम्भिक बजट आधिक्य $ 3.75 बिलियन है तो नया बजट आधिक्य क्या होगा ?

(E) Consider the following IS–LM model of income determination :

Consumption function	$C = 100 + 0.8Y_d$
Investment function	$I = 400 - 50i$
Govt. purchases	$G = 500$
Tax Function	$T = 0.25\ Y$
Demand for money	$M^d = 0.40\ Y - 50\ i$
Nominal Money supply	$M^s = 1200$
Price level	$P = 2$

आय निर्धारण के निम्नलिखित IS–LM मॉडल पर विचार करें।

उपभोग फलन $C = 100 + 0.8\ Y_d$

निवेश फलन $I = 400 - 50i$

सरकारी खरीद $G = 500$

कर फलन $T = 0.25Y$

मुद्रा के लिए मांग $M^d = 0.40Y - 50i$

सांकेतिक मुद्रा पूर्ति $M^s = 1200$

कीमत स्तर $P = 2$

Answer the following questions :

निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दें :

(i) Write down the IS and LM equations. Solve the system for equilibrium level of income and interest rate.

IS व LM वक्रों के लिए समीकरण लिखें। संतुलन आय के स्तर व ब्याज दर के लिए प्रणाली को हल करें।

(ii) Find out Budget Surplus and Saving–Investment Gap corresponding to equilibrium level of income.

आय के संतुलन स्तर के अनुसार बजट आधिक्य व निवेश स्तर की गणना करें।

(iii) Derive the values of fiscal and monetary policy multiplier.

राजकोषीय व मौद्रिक नीति गुणक का मूल्य ज्ञात करें।

(iv) If the nominal money supply is increased by 100, what shall be the change in equilibrium level of income ?

यदि सांकेतिक मुद्रा पूर्ति 100 से बढ़ जाती है तो आय के संतुलन स्तर में कितना बदलाव होगा ?

(4+3+2+1)

(12)

27/5/17

[This question paper contains 12 printed pages]

DESHBANDHU COLLEGE LIBRARY Kalkaji, New Delhi

Your Roll No. : .....

Sl. No. of Q. Paper : **8688** **GC-4**

Unique Paper Code : 12271202

Name of the Course : **B.A.(Hons.)Economics (CBCS)**

Name of the Paper : Mathematical Methods for Economics-II

Semester : II

Time : 3 Hours ***Maximum Marks : 75***

Instructions for Candidates :

(a) Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
इस प्रश्न-पत्र के प्राप्त होने पर तुरंत शीर्ष पर अपना रोल नंबर लिखें।

(b) Answer may be written either in **English** or in **Hindi**; but the same medium should be used throughout the paper.
इस प्रश्न-पत्र का उत्तर **अंग्रेजी** या **हिन्दी** किसी भी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तर एक ही भाषा में होने चाहिए।

(c) There are **five** questions in **all**.
कुल **पाँच** प्रश्न हैं।

(d) **All** questions are compulsory.
सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(e) Use of simple calculator is allowed.
साधारण कैलकुलेटर का उपयोग किया जा सकता है।

(f) **All** parts of a question should be answered together.
प्रत्येक प्रश्न के **सभी** भागों को एक ही स्थान पर हल कीजिए।

P.T.O.

1. Answer any **four** of the following : 4×6
निम्नलिखित में से किन्हीं **चार** के उत्तर दीजिए :

(a) (i) For any two non-zero vectors a and b, prove that :
कोई दो गैर-शून्य सदिशों a एवं b के लिए सिद्ध कीजिए कि :

$$a.b = \frac{1}{4}\|a+b\|^2 - \frac{1}{4}\|a-b\|^2$$

(ii) Show that if the set of vectors $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n)$ is linearly independent and $(c_1, c_2, \ldots\ldots, c_{n-1})$ are any scalars, then the set of vectors $(\alpha_1 - c_1 \alpha_n, \alpha_2 - c_2 \alpha_n, \ldots\ldots, \alpha_{n-1} - c_{n-1} \alpha_n)$ is also linearly independent.

दर्शाइए कि यदि सदिशों का समुचय $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n)$ रेखीय स्वतंत्र है और $(c_1, c_2, \ldots\ldots, c_{n-1})$ कोई अदिश हैं तब सदिशों का समुचय $(\alpha_1 - c_1 \alpha_n, \alpha_2 - c_2 \alpha_n, \ldots\ldots, \alpha_{n-1} - c_{n-1} \alpha_n)$ भी रेखीय स्वतंत्र है।

(b) (i) A square matrix of zeros and ones in which the sum of elements in each row and each column is exactly one is called a Permutation matrix.
Show that any 2×2 Permutation matrix

'P' is invertible and find its inverse.
शून्यों (zeros) एवं एक (ones) का कोई वर्ग आव्यूह जिसमें प्रत्येक पंक्ति एवं प्रत्येक स्तंभ में सदस्यों का योग एक (one) होता है उसे क्रमचय आव्यूह (Permutation matrix) कहा जाता है। दर्शाइए कि कोई 2×2 क्रमचय आव्यूह 'P' प्रतिलोमीय है और इसका प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

(ii) Show that any positive odd integral power of a skew-symmetric matrix is also skew-symmetric.
दर्शाइए कि एक विषमतलीय सममित आव्यूह की कोई धनात्मक विषम पूर्णांक घातांक भी विषमतलीय सममित है।

(c) (i) Find the equation of the line 'L' passing through the points P (1,3,2) and Q (2,5,–6). Where does this line intersect the xy-plane ?
बिन्दु P (1,3,2) एवं Q (2,5,–6) से गुजरने वाली रेखा 'L' के समीकरण को ज्ञात कीजिए। यह रेखा xy- समतल को कहाँ प्रतिच्छेद करती है ?

(ii) Verify the Cauchy-Schwarz inequality for two vectors a=(1,–2,4) and b = (6,1,–5).
दो सदिशों a=(1,–2,4) एवं b = (6,1,–5) के लिए कउची-स्च्वारज (Cauchy-Schwarz) असमानता को सत्यापित कीजिए।

(d) Consider an input-output model with three industries A,B and C. Suppose that the input requirements are given by the following table :

तीन उद्योगों A,B एवं C के साथ आगत-निर्गत मॉडल पर गौर कीजिए। मान लीजिए कि निम्नलिखित तालिका द्वारा आगत आवश्यकताएँ दी गई हैं :

	Industry A उद्योग **A**	**Industry B** उद्योग **B**	**Industry C** उद्योग **C**
Industry A उद्योग A	$a_{11}=0.0$	$a_{12}=0.2$	$a_{13}=0.3$
Industry B उद्योग B	$a_{21}=0.4$	$a_{22}=0.0$	$a_{23}=0.5$
Industry C उद्योग C	$a_{31}=0.1$	$a_{32}=0.3$	$a_{33}=0.0$

The final demand is given by a vector $\begin{pmatrix}1800\\200\\900\end{pmatrix}$.

अंतिम माँग एक सदिश द्वारा दिया गया है $\begin{pmatrix}1800\\200\\900\end{pmatrix}$.

(i) What is the economic interpretation of the condition $a_{ii}=0$ for all i ?
शर्त $a_{ii}=0$ सभी i के लिए की आर्थिक विवेचना क्या है ?

(ii) What is the economic interpretation (if any) of the sum $a_{11}+a_{21}+a_{31}$?
क्या योग $a_{11}+a_{21}+a_{31}$ की (यदि कोई) आर्थिक विवेचना है ?

(iii) What is the economic interpretation (if any) of the sum $a_{21}+a_{22}+a_{23}$?
क्या योग $a_{21}+a_{22}+a_{23}$ की (यदि कोई) आर्थिक विवेचना है ?

(iv) What is the economic interpretation of the element 1800 in the final demand vector ?
अंतिम माँग सदिश में सदस्य 1800 की आर्थिक विवेचना क्या है ?

(v) Write the Leontief system for this model.
इस मॉडल के लिए लयोंटिफ (Leontief) तंत्र लिखिए।

(e) Show that the following system of equations :
दर्शाइए कि निम्नलिखित समीकरण निकाय

$$\lambda x + y + z = 1$$
$$x + \lambda y + z = \lambda$$
$$x + y + \lambda z = \lambda^2$$

has a unique solution provided $\lambda \neq -2$ and $\lambda \neq 1$. Find the solution. Explain the nature of the solution when $\lambda = 1$.
का अद्वितीय हल है यदि $\lambda \neq -2$ एवं $\lambda \neq 1$. हल ज्ञात कीजिए। जब $\lambda = 1$ है तो हल की प्रकृति को समझाइए।

2. Answer any **two** of the following : 2×4

निम्नलिखित में से किन्हीं **दो** के उत्तर दीजिए :

(a) Show that any function $x = x(t)$ that satisfies the equation $(t-a)^2 + x^2 = a^2$ is a solution of the following differential equation :

दर्शाइए कि कोई फलन $x = x(t)$ जो समीकरण $(t-a)^2 + x^2 = a^2$ को संतुष्ट करता है, वो निम्नलिखित अवकलन समीकरण का एक हल है।

$$2tx\frac{dx}{dt} + t^2 - x^2 = 0$$

(b) Show that the differential equation of the family of circles passing through the origin and having center on the y-axis is :

दर्शाइए कि वृत्तों के समूह जो मूल बिन्दु से गुजरती है एवं y -अक्ष पर संकेंद्रित है, उसकी अवकलन समीकरण निम्नलिखित है :

$$\left(x^2 - y^2\right)\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$$

(c) A set S in R^2 is said to be convex if $x \in S$, $y \in S$, and $\lambda \in [0,1] \Rightarrow (1 - \lambda)\, x + \lambda y \in S$. Using this definition, verify whether the following set is convex (A diagram is **not** a sufficient answer).

R^2 में एक समुचय S को उत्तल कहा जाता है यदि $x \in S, y \in S$ एवं $\lambda \in [0,1] \Rightarrow (1 - \lambda)\, x + \lambda y \in S$ इस परिभाषा का उपयोग करते हुए सत्यापित कीजिए कि यद्यपि निम्नलिखित समुचय उत्तल है (केवल रेखाचित्र इसका पूर्ण उत्तर नहीं है)।

$$S = \left\{(x, y) : \sqrt{x} + \sqrt{y} \le 1\right\}$$

3. Answer any **two** of the following : 2×5

निम्नलिखित में से किन्हीं **दो** के उत्तर दीजिए :

(a) Sketch the level curves for the following functions at heights specified by k :

k द्वारा दी गयी **ऊँचाईयों के संगत** में निम्नलिखित फलनों के स्तर वक्र **बनाइए** :

(i) $f(x,y) = y^3 - x^2$, at the height $k = 0$.

$f(x,y) = y^3 - x^2$, ऊँचाई $k = 0$ पर

(ii) $g(x,y) = y - \ln x$, at the heights $k = 0, 2$.

$g(x,y) = y - \ln x$, ऊँचाई $k = 0, 2$ पर

(b) (i) Suppose $z = f(x,y)$ has continuous second-order partial derivatives with $x = r^2 + s^2$ and $y = 2rs$.

Find $\frac{\partial z}{\partial r}$ and $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$.

मान लीजिए $z = f(x, y)$ जहाँ $x = r^2 + s^2$ और $y = 2rs$ के सतत द्वितीय स्तर आंशिक अवकलन हैं।

$\frac{\partial z}{\partial r}$ एवं $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$ ज्ञात कीजिए।

(ii) Let $z = x^2 + 3xy - y^2$. Suppose x changes from 2 to 2.01 and y changes from 3 to 2.98. Find and compare the values of Δz and dz.

मान लीजिए $z = x^2 + 3xy - y^2$ यदि x का मूल्य 2 से 2.01 परिवर्तित होता है और y का मूल्य 3 से 2.98 परिवर्तित होता है तो Δz और dz के मूल्यों की तुलना एवं हल कीजिए।

(c) Consider the Cobb-Douglas production function $f(x,y) = x^a y^b$ (a,b are constants) defined for $x > 0$ and $y > 0$. Prove that f is concave if and only if it exhibits constant or decreasing returns to scale.

गौर कीजिए कि काब-डगलस (Cobb-Douglas) उत्पादन फलन $f(x,y) = x^a y^b$ (a और b स्थिरांक हैं) $x > 0$ और $y > 0$ के लिए परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि f अवतल है यदि और केवल यदि यह स्थिर तथा घटती हुई पैमाने का प्रतिफल को दर्शाती है।

4. (a) Answer any **two** of the following : 2×6

निम्नलिखित में से किन्हीं **दो** के उत्तर दीजिए :

(i) Find for which (x,y) the following function is well-defined (domain):

$f(x,y) = x \ln (y^2 - x)$.

Hence, sketch the domain in the xy-plane.

ज्ञात कीजिए कि किस (x,y) के लिए निम्नलिखित फलन पूर्णतः परिभाषित है (परास)।

$f(x,y) = x \ln (y^2 - x)$.

इससे xy -समतल पर परास का रेखाचित्र बनाइए।

(ii) Consider the function $f(x,y) = xe^{2y-x}$. In what direction should one move from the point (2,1) to increase the value of the function most rapidly ? What is the maximum rate of increase ?

गौर कीजिए $f(x,y) = xe^{2y-x}$. फलन के मूल्य में सर्वाधिक तेजी से वृद्धि के लिए बिन्दु (2,1) से किस दिशा में चलना चाहिए ? सर्वाधिक वृद्धि की दर क्या है ?

(b) (i) Find the equation of the tangent plane and the normal line to the surface.

$f(x, y) = x^2 + y^4 + e^{xy}$ at the point (1, 0, 2).

सतह के सामान्य रेखा एवं स्पर्श समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए :

$f(x, y) = x^2 + y^4 + e^{xy}$ बिन्दु (1, 0, 2) पर.

(ii) Consider the national income model described by the three equations.

$Y = C + I_o + G_o$

$C = \alpha + \beta (Y - T)$ $\quad (\alpha > 0, 0 < \beta < 1)$

$T = y + \delta Y$ $\quad (\gamma > 0, 0 < \delta < 1)$

Here Y is national income, C

consumption, I_0 investment, G_0 public expenditure and T tax revenue.

Find $\frac{\partial Y}{\partial I_0}$ and $\frac{\partial Y}{\partial G_0}$

राष्ट्रीय आय मॉडल के विश्लेषित तीन समीकरणों पर गौर कीजिए जहाँ Y राष्ट्रीय आय, C उपभोग, I_0 निवेश, G_0 सार्वजनिक व्यय तथा T कर आगम है।

$Y = C + I_0 + G_0$

$C = \alpha + \beta\ (Y-T) \qquad (\alpha > 0,\ 0 < \beta < 1)$

$T = y + \delta Y \qquad (\gamma > 0,\ 0 < \delta < 1)$

$\frac{\partial Y}{\partial I_0}$ तथा $\frac{\partial Y}{\partial G_0}$ ज्ञात कीजिए।

(c) Which of the following functions are homogeneous/homothetic ? Give reasons for your answers.

निम्नलिखित में से कौन-सा फलन समरूप (homogeneous) या होमोथेटिक (homothetic) है ? अपने उत्तरों के लिए कारण बताइए।

(i) $f(x,y) = e^{x^2y}, e^{xy^2}$

(ii) $h(x,y) = \ln(x^2/y^2), (x \neq 0, y \neq 0)$.

5. Answer any **three** of the following : 3×7

निम्नलिखित में से किन्हीं **तीन** के उत्तर दीजिए :

(a) Let $f(x,y) = 2x^2-4x + y^2-4y + 1$ be defined over the area bounded by the straight lines $x = 0$, $y = 2$ and $y = 2x$. Find and classify all the extreme points of this function. Also, find the extreme values of the function f (x,y).

मान लीजिए $f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$ सीधी रेखाओं $x = 0$, $y = 2$ तथा $y = 2x$ द्वारा सीमित क्षेत्र के लिए परिभाषित है। इस फलन के लिए सभी चरम बिंदुओं को वर्गीकृत एवं ज्ञात कीजिए। फलन f(x,y) की चरम मूल्यों को ज्ञात कीजिए :

(b) Use the Lagrangean method to find the extreme values of $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ on the circle $x^2 + y^2 = 1$.

लग्रांज विधि का उपयोग करते हुए वृत $x^2 + y^2 = 1$ पर $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ के चरम मूल्यों को निकालिए।

(c) Find all the local extreme points and/or saddle points for the following function.

$$f(x, y) = x^3 + 3y^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x - 9y.$$

निम्नलिखित फलन के सभी स्थानीय चरम व/या उदासीन बिन्दु ज्ञात कीजिए :

$$f(x, y) = x^3 + 3y^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x - 9y.$$

(d) A consumer faces the following utility maximization problem.

Max.$U(x,y) = 100 - e^{-x} - e^{-y}$ subject to $px+qy = m$, where $x > 0$, $y > 0$. Here, p and q are per unit prices of goods x and y respectively, and m is the consumer's money income.

एक उपभोक्ता निम्नलिखित उपयोगिता अधिक्तमिकरन समस्या का सामना करता है।

Max.$U(x,y) = 100 - e^{-x} - e^{-y}$ यदि $px + qy = m$, जहाँ $x > 0$, $y > 0$. यहाँ p और q क्रमशः वस्तु x और y की प्रति इकाई कीमतें हैं तथा m उपभोक्ता की मौद्रिक आय है।

(i) Find the necessary conditions for the solution of the problem and solve them for the two demand functions $x = f(p,q,m)$ and $y = g(p,q,m)$ by using the Lagrangean method.

लग्रांज विधि का उपयोग करते हुए $x = f(p,q,m)$ तथा $y = g(p,q,m)$ माँग फलनों के लिए हल कीजिए एवं हल के लिए आवश्यक शर्तों का पता लगाइए।

(ii) What happens to the optimal values of x and y if per unit prices of both goods and consumer's money income are doubled ?

x और y की इष्टतम (optimal) मूल्यों में क्या कोई परिवर्तन होगा यदि दोनों वस्तुओं की प्रति इकाई कीमतें तथा उपभोक्ता की मौद्रिक आय दोगुनी हो जाए ?

For Posting (13) 2017

This question paper contains 8+4 printed pages]

Roll No. | | | | | | | | | | |

DESHBANDHU COLLEGE LIBRARY Kalkaji, New Delhi-19

S. No. of Question Paper : **6016**

Unique Paper Code : **227201** **G**

Name of the Paper : **Introductory Macroeconomics**

Name of the Course : **B.A. (Hons.) Economics**

Semester : **II**

Duration : **3 Hours** Maximum Marks : **75**

(Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.)

(इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए ।)

Note :— Answers may be written *either* in English *or* in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

टिप्पणी :—इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेज़ी **या** हिन्दी किसी एक भाषा में दीजिए; लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

All questions are to be attempted.

Each question has five parts (A, B, C, D and E).

Part (A) of each question is compulsory.

Attempt any *three* from the remaining four parts.

सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिये।

प्रत्येक प्रश्न **पाँच** भागों (अ, ब, स, द और य) में विभाजित है।

प्रत्येक प्रश्न का भाग 'अ' अनिवार्य है।

शेष चार भागों में से **तीन** भागों के उत्तर दीजिए।

P.T.O.

1. (A) During 2015, Mr. Vikram Mishra, the self-employed owner of the local bakery received Rs. 4,00,000 from the sale of biscuits. During the year, his equipment depreciated in value by Rs. 50,000. Of the remaining Rs. 3,50,000, he sent Rs. 30,000 to the government as sales tax, took home Rs. 2,20,000 as salary and retained Rs. 1,00,000 in his business to add a new equipment in future. From Rs. 2,20,000 that he took home, he paid Rs. 70,000 as income tax.

On the basis of the above information, calculate Vikram Mishra's contribution to :

(*i*) Gross Domestic Product

(*ii*) National Income

(*iii*) Private Disposal Income. 4

(B) (*i*) Distinguish between real GDP and nominal GDP. How do we compute the value of real GDP ? 3

(*ii*) Define private saving. By using the 'uses of saving' identity, state how private saving is utilised in the economy ? 4

(C) (*i*) Which of the following transactions are included in calculation of India's GDP ? Give reasons in support of your answer.

(1) Unsold goods lying in the godown of the manufacturing firm.

(2) The profits earned by MTNL Company. 3

(*ii*) Why is the difference between real interest rate and expected real interest rate ? Which of the two is more relevant for decision making on the part of lenders and borrowers ? 4

(D) (*i*) What are the components of Balance of Payments accounts ? State the fundamental Balance of Payments identity. 5

(*ii*) What do you understand by underground economy ? 2

(E) (*i*) Tina borrowed Rs. 30 lakhs from a bank in 2012 at some rate of interest to be paid back in 2013. During the course of the year, inflation was more than anticipated. Who gained and who lost ? Why ? 3

(*ii*) Define national wealth. In what ways can national wealth of an economy be augmented ? 4

(अ) 2015 के दौरान, श्रीमान विक्रम मिश्रा जो कि एक निजी बेकरी के स्वरोज़गारित स्वामी हैं को बिस्कुटों की बिक्री से 4 लाख रुपये प्राप्त हुए हैं। वर्ष के दौरान, उसके औजारों में 50 हजार रुपये मूल्य से घिसावट हुई। बचे हुए 3 लाख 50 हजार रुपयों में से उन्होंने 30 हजार रुपये सरकार को बिक्री कर के रूप में दिए, 2,20,000 रुपये वेतन के रूप में घर लेकर गया तथा 1,00,000 रुपये भविष्य में नए औजार खरीदने के लिए व्यापार में रखे। 2,20,000 रुपये जो वह घर ले गया था उसमें से 70,000 रुपये सरकार को आय कर के रूप में दिए। ऊपर दी गई सूचना के आधार पर विक्रम मिश्रा के निम्नलिखित में सहयोग की गणना कीजिए :

(*i*) सकल घरेलू उत्पाद

(*ii*) राष्ट्रीय आय

(*iii*) निजी प्रोज्य आय।

(ब) (*i*) वास्तविक GDP व सांकेतिक GDP में अन्तर कीजिए। हम वास्तविक GDP का मूल्य कैसे मापते हैं ?

(*ii*) निजी बचतों को परिभाषित कीजिए। ''बचतों के उपयोगों'' की आईडेन्टिटी का उपयोग करके, बताइए की अर्थव्यवस्था में निजी बचत का कैसे उपयोग किया जाता है ?

(स) (*i*) निम्नलिखित में से कौनसे लेन-देन भारत के GDP की गणना में शामिल किए जाते हैं ? अपने उत्तर के समर्थन में कारण दीजिए।

(1) एक पुन:निर्माण फर्म के गोदाम में रखी हुई गैर-बिक्री वस्तुएँ।

(2) MTNL कम्पनी द्वारा अर्जित लाभ।

(*ii*) वास्तविक ब्याज दर व अपेक्षित वास्तविक ब्याज दर के बीच अन्तर क्यों है ? देनदार व लेनदारों के अनुसार निर्णय लेने के लिए दोनों में से कौन अधिक महत्वपूर्ण है ?

(द) (*i*) भुगतान शेष खातों के घटक क्या हैं ? आधारभूत भुगतान शेष आईडेंटिटी को बताइए।

(*ii*) अंतर्भूतल अर्थव्यवस्था से आप क्या समझते हैं ?

(य) (*i*) टिना ने 2012 में एक बैंक से कुछ ब्याज दर पर 30 लाख रुपये उधार लिए जो उसे 2013 में वापस लौटाने हैं। इस वर्ष के दौरान, मुद्रास्फीति अपेक्षा से अधिक है। किसे लाभ होगा व किसे हानि ? क्यों ?

(*ii*) राष्ट्रीय सम्पत्ति को परिभाषित कीजिए। किस प्रकार से एक अर्थव्यवस्था की राष्ट्रीय सम्पत्ति में वृद्धि की जा सकती है ?

2. (A) Briefly explain the following concepts :

(*i*) Classical dichotomy

(*ii*) Shoe-leather costs. 4

(B) (*i*) Derive the aggregate demand curve in the classical theory. 4

(*ii*) Explain the concept of income velocity of money. What would happen to the income velocity on account of financial innovations in the economy ? 3

(C) (*i*) Why do banks keep a part of funds received from the public in the form of reserves ? 3

(*ii*) According to the Fisher effect, how does an increase in the inflation rate affect the real rate of interest and the nominal rate of interest ? 2

(*iii*) Why would you expect bond prices and interest rates to move in opposite directions ? 2

(D) Why would a government expand nominal money supply at a rate much higher than the level that maximises Seignorage ? Briefly state the stabilisation program adopted by the government to end hyperinflation ? 7

(E) Elaborate on the determination of rate of interest in the money market. What happens to the equilibrium rate of interest if :

(*i*) nominal income decreases and

(*ii*) money supply increases. 7

(अ) निम्नलिखित अवधारणाओं की संक्षिप्त व्याख्या कीजिए :

(*i*) क्लासिकल विरोधाभास

(*ii*) शु-लेदर लागत।

(ब) (*i*) क्लासिकल सिद्धांत के अनुसार सामूहिक मांग वक्र को व्युत्पन्न कीजिए।

(*ii*) मुद्रा के आय वेग की अवधारणा की व्याख्या कीजिए। अर्थव्यवस्था में वित्तीय नवनिर्माण के कारण वेग पर क्या प्रभाव पड़ेगा ?

(स) (*i*) जनता से प्राप्त कोषों में से कुछ हिस्सा बैंक रिजर्व के रूप में क्यों रखते हैं ?

(*ii*) फिशर प्रभाव के अनुसार, मुद्रास्फीति दर में वृद्धि से वास्तविक ब्याज दर व सांकेतिक ब्याज दर को कैसे प्रभावित करती है ?

(*iii*) आप बाँड की कीमतों व ब्याज दर में विपरीत दिशा में बदलाव की अपेक्षा क्यों करते हैं ?

(द) वित्तपोषण को अधिकतम करने वाले स्तर से अधिक दर पर सरकार सांकेतिक मुद्रा पूर्ति का क्यों विस्तार करती है ? अत्यधिक मुद्रास्फीति का अंत करने के लिए सरकार द्वारा अपनाए गए स्थिरीकरण कार्यक्रम को संक्षेप में बताइये।

(य) मुद्रा बाजार में ब्याज दर निर्धारण पर प्रकाश डालिए। संतुलन ब्याज दर का क्या होगा यदि

(*i*) सांकेतिक आय घटती है, व

(*ii*) मुद्रा पूर्ति बढ़ती है।

3. (A) Are the following statements true or false ? Give reasons.

(*i*) An increase in tax rate increases the value of the multiplier.

(*ii*) Equal increases in government spending and taxes have no effect on equilibrium level of income. 4

(B) How is equilibrium level of output, employment and real wage rate determined in the classical model ? What explains the shape of vertical Aggregate Supply curve in the classical model ? 7

(C) Given Consumption : $C = 40 + 0.75\ (Y - 80)$

Investment : $I = 140 - 10i$,

Government Expenditure = 100

Money demand : $L = 0.2Y - 5i$

Real Money Supply : $M/P = 85$

(i is rate of interest, other figures are in Rs. crores)

(*i*) Compute the equilibrium level of income and the rate of interest.

(*ii*) Suppose that government increases its expenditure by an additional Rs. 65 crores, what would be the impact on the equilibrium level of income ?

(*iii*) By how much would the equilibrium level of income change if LM curve is horizontal ? Show part (*ii*) & part (*iii*) using diagrams. 2+2+3

(D) Elaborate on the relationship between the effectiveness of monetary policy and the slope of LM curve. 7

(E) (*i*) Show the effect of investment subsidy on the aggregate income, investment and consumption. 4

(*ii*) Suggest a policy mix to achieve the following objectives, using IS-LM framework :

(*a*) Increase in the level of income (Y) while keeping rate of interest constant.

(*b*) Decrease in budget deficit while keeping income level (Y) unchanged. 3

(अ) क्या निम्नलिखित कथन सही हैं या गलत ? कारण दीजिए :

(*i*) कर की दर में वृद्धि से गुणक का मूल्य बढ़ता है।

(*ii*) सरकारी व्यय व करों में बराबर वृद्धि का आय के संतुलन स्तर पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

(ब) क्लासिकल मॉडल में संतुलन आय स्तर, रोजगार व वास्तविक मजदूरी दर कैसे निर्धारित होती है ? क्लासिकल मॉडल में वर्टिकल सामूहिक पूर्ति वक्र के आकार की क्या व्याख्या है ?

(स) दिए गए उपभोग : $C = 40 + 0.75 (Y - 80)$

निवेश : $I = 140 - 10i$

सरकारी व्यय : 100

मुद्रा की मांग : $L = 0.2Y - 5i$

वास्तविक मुद्रा पूर्ति : $M/P = 85$

(*i* ब्याज दर है, अन्य आँकड़े करोड़ों रुपयों में हैं।)

(*i*) आय के संतुलन स्तर व ब्याज दर को ज्ञात कीजिए।

(*ii*) मान लीजिए कि सरकार अपने व्यय को अतिरिक्त 65 करोड़ रुपयों से बढ़ा देती है। आय के संतुलन स्तर पर क्या प्रभाव पड़ेगा ?

(*iii*) यदि LM वक्र 'X' रेखा के समान्तर हो तो आय का संतुलन स्तर कितने से बदलेगा ? भाग (*ii*) और भाग (*iii*) को चित्र की सहायता से दर्शाइए।

(द) LM वक्र के ढ़लान व मौद्रिक नीति की प्रभावशीलता के बीच सम्बन्ध पर प्रकाश डालिए।

(य) (*i*) सामूहिक आय, निवेश व उपभोग पर निवेश सहायता के प्रभाव को दर्शाइए।

(*ii*) IS-LM ढाँचे का उपयोग करके, निम्नलिखित उद्देश्यों को प्राप्त करने के लिए नीति मिश्रण का सुझाव दीजिए :

(*a*) आय के स्तर (Y) में वृद्धि जबकि ब्याज दर को स्थिर रखना।

(*b*) बजट घाटे में कमी जबकि आय स्तर (Y) में परिवर्तन न करना।

[This question paper contains 14+9 printed pages.]

14

DESHBANDHU COLLEGE LIBRARY Kalkaji, New Delhi-19

2017

Your Roll No.....

Sr. No. of Question Paper : 6017 **G**

Unique Paper Code : 227202

Name of the Paper : Statistical Methods for Economic – II

Name of the Course : **B.A. (Hons) Economics**

Semester : II

Duration : 3 Hours Maximum Marks : 75

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. The paper is divided into **four** Sections. Attempt **all** Sections. Choice is applicable in **Section III** and **IV** only.
3. Answer to all question within each Section are to follow each other. Start the answer to each question on a new page and all sub-parts of a question should follow one after the other.
4. Use of simple calculator is allowed.
5. Answers may be written either in English or Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

P.T.O.

छात्रों के लिए निर्देश

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए ।
2. यह प्रश्न पत्र **चार** भाग में है । **सभी** भागों का उत्तर दें । भाग **III** और **IV** में चयन उपलब्ध हैं ।
3. प्रत्येक भाग के सभी प्रश्नों के उत्तर एक साथ लिखें । हर प्रश्न का उत्तर नए पृष्ठ से शुरू करें और पूरा प्रश्न का उत्तर एक साथ लिखें ।
4. साधारण कैलकुलेटर का प्रयोग मान्य है ।
5. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए ।

SECTION – I

All *questions are compulsory.*

सभी *प्रश्नों का उत्तर दीजिए ।*

1. The probability distribution of the number of biscuits sold (X) on a given day by a seller is as follows –

X	p(X)
1	0.2
2	0.8

Let $(X_1\ X_2)$ be a random sample of the number of biscuits sold on any two randomly chosen days. Write the sampling distribution of sample variance (S^2). What is the relationship between $E(S^2)$ and σ^2? (5)

एक विक्रेता द्वारा दिए गए एक दिन में बिस्कुट की बिक्री संख्या (X) की सम्भावना वितरण निम्नलिखित है :

X	p(X)
1	0.2
2	0.8

मान लीजिए $(X_1 X_2)$ दो बेतरतीब ढंग से चुने हुए दो दिनों में बेचे गए बिस्कुटों की संख्या के नमूने हैं । नमूना विचरण (S^2) का नमूना वितरण लिखें । नमूना विचरण $E(S^2)$ व σ^2 के बीच क्या सम्बन्ध है ?

2. The time that it takes a randomly selected rat of a certain subspecies to find its way through a maze is a normally distributed random variable with $\mu = 1.5$ and $\sigma = 0.35$ min. Suppose five rats are selected. Let $X_1 \ldots\ldots X_5$ denote their times in the maze. Assuming Xi^s to be a random sample from this normal distribution, what is the probability that the total time $T_0 = X_1 + \ldots\ldots X_5$ for the five rats is between 6 and 8 ? (5)

एक बेतरतीब ढंग से चुने हुए, एक निश्चित उप-प्रजाति के चूहें द्वारा एक भूल भूलैया में से अपना रास्ता खोजने के लिए लिया गया समय $\mu = 1.5$ व $\sigma = 0.35$ मिनट के साथ सामान्यता वितरित है। मान लीजिए पाँच चूहों का चयन किया जाता है। मान लीजिए की X_1 ..... X_5 भूल भुलैया में उनके समय को दर्शाता है। यह मानते हुए की X_1's इस सामान्य वितरण में से एक बेतरतीब नमूना है, क्या सम्भावना है कि पाँच चूहों के लिए कुल समय $T_0 = X_1 + ... + X_5$, 6 व 8 के बीच है ?

SECTION – II

*(**All** questions are compulsory.)*

***सभी** प्रश्नों का उत्तर दीजिए।*

3. Explain the difference between an estimate and an estimator with the help of an example. (5)

एक उदाहरण की सहायता से एक अनुमान और अनुमानक के बीच का अंतर समझाइए।

4. How does an increase in the confidence level affect the precision of estimates. (5)

आत्मविश्वास के स्तर में वृद्धि अनुमानों की शुद्धता को कैसे प्रभावित करता है ?

5. At time $t = 0$, 20 components are tested. The lifetime distribution of each is exponential with parameter λ. The experimenter then leaves the test facility unmonitored. On his return, 24 hours later the experimenter immediately terminates the test after noticing that $y = 15$ of the 20 components are still in operation (5 have failed). Derive the maximum likelihood estimator of λ. (5)

समय $t = 0$ पर, 20 घटकों का परीक्षण किया गया। पैरामीटर λ के साथ प्रत्येक का जीवनकाल वितरण घातीय है। प्रयोगकर्ता तब परीक्षण सुविधा को गैर-मॉनिटर छोड़ देता है। उसकी वापसी पर 24 घंटे बाद प्रयोगकर्ता यह जानने के बाद कि 20 घटकों में से $Y = 15$ अभी भी संचालन में है (5 विफल हो गए हैं) को तुरंत बंद करता है। λ के अधिकतम संभावना अनुमानक को प्राप्त करे है।

6. The following 48 observations on bond strength is given

11.5, 12.1, 9.9, 9.3, 7.8, 6.2, 6.6, 7.0, 13.4, 17.1, 9.3, 5.6, 5.7, 5.4, 5.2, 5.1, 4.9, 10.7, 15.2, 8.5, 4.2, 4.0, 3.9, 3.8, 3.6, 3.4, 20.6, 25.5, 13.8, 12.6, 13.1, 8.9, 8.2, 10.7, 14.2, 7.6, 5.2, 5.5, 5.1, 5.0, 5.2, 4.8, 4.1, 3.8, 3.7, 3.6, 3.6, 3.6

Estimate the average bond strength in a way that conveys information about precision and reliability. (5)

बाँड ताकत पर निम्नलिखित 48 टिप्पणियां दी गई हैं :

11.5, 12.1, 9.9, 9.3, 7.8, 6.2, 6.6, 7.0, 13.4, 17.1, 9.3, 5.6, 5.7, 5.4, 5.2, 5.1, 4.9, 10.7, 15.2, 8.5, 4.2, 4.0, 3.9, 3.8, 3.6, 3.4, 20.6, 25.5, 13.8, 12.6, 13.1, 8.9, 8.2, 10.7, 14.2, 7.6, 5.2, 5.5, 5.1, 5.0, 5.2, 4.8, 4.1, 3.8, 3.7, 3.6, 3.6, 3.6

औसत बाँड ताकत का अनुमान इस प्रकार लगाईए जो सटीकता व विश्वसनियता के बारे में जानकारी देती है।

7. The following 15 observations on maximum concrete power is given

33.2, 41.8, 37.3, 40.2, 36.7, 39.1, 36.2, 41.8, 36.0, 35.23, 36.7, 38.9, 35.8, 35.2, 40.1

Calculate an upper confidence bound with confidence level 95 percent for the population standard deviation of maximum concrete power. (5)

अधिकतम कंक्रीट पावर पर निम्नलिखित 15 टिप्पणियाँ दी गई हैं :

33.2, 41.8, 37.3, 40.2, 36.7, 39.1, 36.2, 41.8, 36.0, 35.23, 36.7, 38.9, 35.8, 35.2, 40.1

अधिकतम कंक्रीट पावर की आबादी के मानक विचलन के लिए 95 प्रतिशत आत्मविश्वास के स्तर के साथ एक उच्च आत्मविश्वास बाँड ज्ञात करें।

SECTION – III

Q. 8 is compulsory.

Attempt any **Two** *questions out of Q. 9, Q. 10 and Q. 11.*

प्रश्न संख्या 8 अनिवार्य है।

प्रश्न 9, 10 एव 11 में से किन्हीं **दो** *का उत्तर दीजिए।*

8. (a) Define p value of a hypothesis test.

(b) What is the p value for the following hypothesis ?

(i) H0: $\mu = 50$ and H1: $\mu > 50$ and z test value = 1.53

(ii) H0: $\mu = .12$ and H1: $\mu \neq .12$ and z test value = -1.95 (2+3)

(अ) एक परिकल्पना परीक्षण की P– मूल्य को परिभाषित करें।

(ब) निम्नलिखित परिकल्पनाओं के लिए P– मूल्य क्या होगा।

(i) H0: $\mu = 50$ व H1: $\mu > 50$ तथा z परीक्षण मूल्य = 1.53

(ii) H0: $\mu = .12$ व H1: $\mu \neq .12$ तथा z परीक्षण मूल्य = -1.95

9. (a) A driving test of 200 young and 400 senior drivers showed that 50% of the young and 60% of the senior drivers were cautious drivers. Use this data to test whether the proportion of cautious drivers is higher for the senior drivers. Find the P-value for the test and test at 5% level of significance ?

(b) In a survey of 25 senior managers and 26 junior managers it was found that the variance in salaries is 2.1 and 11.1 respectively.

(i) At the 10% level can we say that the variances in salaries differ significantly across senior and junior managers ?

(ii) Does your answer change if we wish to test whether variance is higher for junior managers as compared to senior managers ? (5+5)

(अ) 200 युवा व 400 वरिष्ठ चालाकों के ड्राइविंग टेस्ट से यह पता चलता है, कि 50 प्रतिशत युवा व 60 प्रतिशत वरिष्ठ चालक सतर्क चालक है। यह टैस्ट करने के लिए कि सतर्क चालकों का अनुपात वरिष्ठ चालकों से अधिक है इन आंकड़ों का उपयोग करें। टैस्ट के लिए P – कीमत ज्ञात करें और 5 प्रतिशत महत्व स्तर पर टैस्ट करें।

(ब) 25 वरिष्ठ प्रबंधकों व 26 जूनियर प्रबंधकों के एक सर्वेक्षण में यह पाया गया कि वेतन में अंतर क्रमशः 2.1 व 11.1 है।

(i) 10 प्रतिशत स्तर पर क्या हम यह कह सकते हैं कि वरिष्ठ व जूनियर प्रबंधकों के वेतन में महत्वपूर्ण अंतर है ?

(ii) क्या आपका उत्तर बदलता है। यदि हम यह जाँचना चाहते हैं कि वरिष्ठ प्रबंधकों की तुलना में विचरण जूनियर प्रबंधकों के लिए अधिक है या नहीं ?

10. (a) The radius of a CD may be considered to be a normally distributed random variable with a standard deviation of 0.05 cm. To test the null hypothesis $\mu = 2$ against the alternative $\mu \neq 2$, a random sample of 50 CD's is taken. If the probability of Type I error is 0.05. What is the probability of Type II error if the true average radius of the CD's is 2.01 cm ?

(b) Two airports were compared on the basis of delayed flights. A flight is considered delayed if it is 15 minutes behind schedule. Using the data below can we argue that the proportion of delayed flights is significantly different across two airports ? Use a 5% level of confidence.

	Airport 1	Airport 2
No of flights	900	1200
Delayed flights	252	312

(5+5)

(अ) एक सी.डी. की त्रिज्या (radius) को 0.05 सेमी के मानक विचलन वाले प्रसामान्य बंटन वाला एक यादृच्छिक चर माना जा सकता है। वैकल्पिक प्राक्कल्पना के $\mu \neq 2$, विरूद्ध निराकरणीय प्राक्कल्पना $\mu = 2$ की जाँच करने के लिए 50 सी.डी. का एक यादृच्छिक प्रतिदर्श लिया गया। यदि I प्रकार की त्रुटि की प्रायिकता 0.05 है तो II प्रकार की त्रुटि की प्रायिकता क्या होगी, यदि सी.डी. की सही माध्य त्रिज्या 2.01 सेमी है।

(ब) उड़ानों में देरी के आधार पर दो हवाई अड्डों की तुलना की गई। एक उड़ान को देरी माना जाता है यदि यह निर्धारित समय से 15 मिनट पीछे है। नीचे दिए गए आंकड़ों के आधार पर क्या हम यह तर्क दे सकते हैं की दोनों हवाई अड्डों पर देरी से उड़ानों के बीच का अंतर महत्वपूर्ण रूप से भिन्न है ? विश्वास का 5 प्रतिशत स्तर उपयोग करें:

	Airport 1 / हवाई अड्डा 1	Airport 2 / हवाई अड्डा 2
No of flights उड़ानों की संख्या	900	1200
Delayed flights देरी से उड़ाने	252	312

11. (a) Explain the types of errors possible in any hypothesis testing.

(b) Two travel companies offer services to customers who rate them on quality and standards. If there is no significant difference in ratings, they will merge. A consultant is hired who uses samples from the population of travellers to get the following data. Test if they should go ahead with the merger using 5% significance level.

	Company 1	Company 2
Average ratings	85.36	81.4
Sample size	37	44
Population variance	4.55	3.97

(5+5)

(अ) किसी भी परिकल्पना परीक्षण में सम्भव त्रुटियों के प्रकारों की व्याख्या करें।

(ब) दो यात्रा कम्पनियाँ ग्राहकों को सेवाएँ प्रदान करती है। जो उन्हें गुणवत्ता व मानक के आधार पर रेटिंग करते हैं। यदि रेटिंग में कोई महत्वपूर्ण अंतर नहीं होता। तो वह विलय हो जाएगी। एक सलाहकार को काम पर रखा गया। जो यात्रियों की आबादी से नमूनों का उपयोग करके निम्नलिखित डेटा प्राप्त करता है। परीक्षण करें यदि उन्हें विलय के आगे बढ़ना चाहिए, 5 प्रतिशत महत्व स्तर का उपयोग करके।

	Company 1 कम्पनी 1	Company 2 कम्पनी 2
Average ratings औसत रेटिंग	85.36	81.4
Sample size नमूना आकार	37	44
Population variance जनसंख्या विचरण	4.55	3.97

SECTION – IV

Q. **12** *is compulsory.*

Attempt any **one** *question out of Q.* **13** *and Q.* **14.**

प्रश्न संख्या 12 *अनिवार्य है।*

प्रश्न 13 *एव* 14 *में से किन्हीं* **एक** *का उत्तर दीजिए।*

12. What are the basic assumptions of the linear regression model ? (5)

रेखीय प्रतीयगमन मॉडल की बुनियादी मान्यताएँ क्या हैं ?

13. You are given the following information :

$\sum X = 30, \sum Y = 180, \sum XY = 1000$

$\sum X^2 = 200, \sum Y^2 = 5642, N = 6$

(i) Find the regression line of Y on X

(ii) Interpret the slope coefficient if X = annual income in thousand and Y = sales of TVs in hundreds.

(iii) What is the coefficient of determination ?

(iv) Interpret the coefficient of determination.

(v) What is the value of standard error of estimate ?

(3+1+3+1+2)

आपके लिए निम्नलिखित सूचना दी गई हैं :

$\sum X = 30, \sum Y = 180, \sum XY = 1000$

$\sum X^2 = 200, \sum Y^2 = 5642, N = 6$

(i) 'X' पर 'Y' की प्रतिगमन रेखा ज्ञात करें।

(ii) ढलान गुणांक की व्याख्या करें यदि 'X' हजारों में वार्षिक आय है व Y = सेकंडों में टी. वी. की बिक्री है।

(iii) डिटरमिनेशन गुणांक क्या है ?

(iv) डिटरमिनेशन गुणांक की व्याख्या करें।

(v) अनुमान के मानक त्रुटि का मूल्य क्या है ?

14. You are given the following data for two variables X and Y

X	9	10	12	18	21
Y	65	68	65	70	72

(i) Calculate the coefficient of correlation.

(ii) Test if there is a significant linear relation between X and Y at 5% level ?

(iii) What assumptions have you made about joint probability distribution of X and Y to conduct the test in part ii ?

(iv) Calculate the error sum of squares when Y is regressed on X. (4+3+1+2)

'X' व 'Y' दो चरों के लिए आपको निम्नलिखित आंकड़े दिए गए हैं :

X	9	10	12	18	21
Y	65	68	65	70	72

(i) सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात करें।

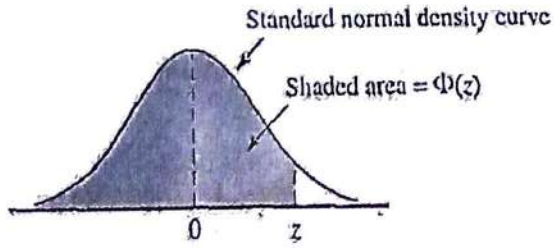
(ii) 5 प्रतिशत महत्व स्तर पर परीक्षण करें यदि 'X' व 'Y' के बीच महत्वपूर्ण रेखीय सम्बन्ध है।

(iii) भाग-II में परीक्षण करने के लिए 'X' व 'Y' के संयुक्त सम्भावना वितरण के बारे में आपने क्या मान्यताएँ बनाई है ?

(iv) जब 'Y' को 'X' पर प्रतिपगमनित किया जाता है तो त्रुटियों के वर्गों का योग ज्ञात करें।

Table A.3 Standard Normal Curve Areas

$\Phi(z) = P(Z \le z)$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
−2.9	.0019	.0018	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0038
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
−1.8	.0359	.0352	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
−1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0722	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
−1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
−0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
−0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
−0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
−0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
−0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
−0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
−0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3482
−0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
−0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
−0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

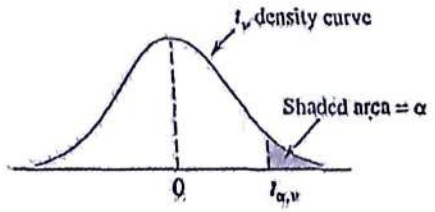
(continued)

Table A.3 Standard Normal Curve Areas *(cont.)*

$\Phi(z) = P(Z \leq z)$

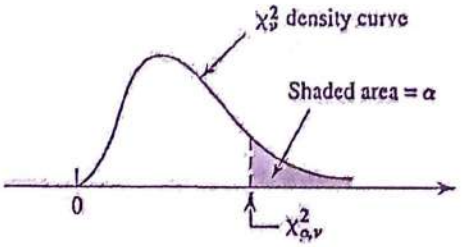
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9278	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Table A.5 Critical Values for t Distributions



	α						
ν	.10	.05	.025	.01	.005	.001	.0005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
32	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365	3.622
34	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348	3.601
36	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333	3.582
38	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319	3.566
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.262	3.496
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

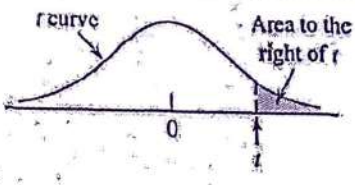
Table A.7 Critical Values for Chi-Squared Distributions



	α									
ν	.995	.99	.975	.95	.90	.10	.05	.025	.01	.005
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.843	5.025	6.637	7.882
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.992	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.344	12.837
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.832	15.085	16.748
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.440	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.012	18.474	20.276
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.534	20.090	21.954
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.022	21.665	23.587
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.724	26.755
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.041	19.812	22.362	24.735	27.687	29.817
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.600	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.577	32.799
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.407	7.564	8.682	10.085	24.769	27.587	30.190	33.408	35.716
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.843	7.632	8.906	10.117	11.651	27.203	30.143	32.852	36.190	38.580
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.033	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.670	35.478	38.930	41.399
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.042	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.195	11.688	13.090	14.848	32.007	35.172	38.075	41.637	44.179
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.519	11.523	13.120	14.611	16.473	34.381	37.652	40.646	44.313	46.925
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.807	12.878	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.194	46.962	49.642
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.120	14.256	16.147	17.708	19.768	39.087	42.557	45.772	49.586	52.333
30	13.787	14.954	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
31	14.457	15.655	17.538	19.280	21.433	41.422	44.985	48.231	52.190	55.000
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	15.814	17.073	19.046	20.866	23.110	43.745	47.400	50.724	54.774	57.646
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	17.191	18.508	20.569	22.465	24.796	46.059	49.802	53.203	57.340	60.272
36	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581
37	18.584	19.960	22.105	24.075	26.492	48.363	52.192	55.667	59.891	62.880
38	19.289	20.691	22.878	24.884	27.343	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181
39	19.994	21.425	23.654	25.695	28.196	50.660	54.572	58.119	62.426	65.473
40	20.706	22.164	24.433	26.509	29.050	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766

For $\nu > 40$, $\chi^2_{\alpha,\nu} \approx \nu\left(1 - \frac{2}{9\nu} + z_\alpha\sqrt{\frac{2}{9\nu}}\right)^3$

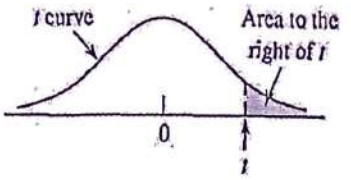
Table A.8 t Curve Tail Areas



t \ ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0.0	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500
0.1	.468	.465	.463	.463	.462	.462	.462	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461
0.2	.437	.430	.427	.426	.425	.424	.424	.423	.423	.423	.423	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.422
0.3	.407	.396	.392	.390	.388	.387	.386	.386	.386	.385	.385	.385	.384	.384	.384	.384	.384	.384
0.4	.379	.364	.358	.355	.353	.352	.351	.350	.349	.349	.348	.348	.348	.347	.347	.347	.347	.347
0.5	.352	.333	.326	.322	.319	.317	.316	.315	.315	.314	.313	.313	.313	.312	.312	.312	.312	.312
0.6	.328	.305	.295	.290	.287	.285	.284	.283	.282	.281	.280	.280	.279	.279	.279	.278	.278	.278
0.7	.306	.278	.267	.261	.258	.255	.253	.252	.251	.250	.249	.249	.248	.247	.247	.247	.247	.246
0.8	.285	.254	.241	.234	.230	.227	.225	.223	.222	.221	.220	.220	.219	.218	.218	.218	.217	.217
0.9	.267	.232	.217	.210	.205	.201	.199	.197	.196	.195	.194	.193	.192	.191	.191	.191	.190	.190
1.0	.250	.211	.196	.187	.182	.178	.175	.173	.172	.170	.169	.169	.168	.167	.167	.166	.166	.165
1.1	.235	.193	.176	.167	.162	.157	.154	.152	.150	.149	.147	.146	.146	.144	.144	.144	.143	.143
1.2	.221	.177	.158	.148	.142	.138	.135	.132	.130	.129	.128	.127	.126	.124	.124	.124	.123	.123
1.3	.209	.162	.142	.132	.125	.121	.117	.115	.113	.111	.110	.109	.108	.107	.107	.106	.105	.105
1.4	.197	.148	.128	.117	.110	.106	.102	.100	.098	.096	.095	.093	.092	.091	.091	.090	.090	.089
1.5	.187	.136	.115	.104	.097	.092	.089	.086	.084	.082	.081	.080	.079	.077	.077	.077	.076	.075
1.6	.178	.125	.104	.092	.085	.080	.077	.074	.072	.070	.069	.068	.067	.065	.065	.065	.064	.064
1.7	.169	.116	.094	.082	.075	.070	.065	.064	.062	.060	.059	.057	.056	.055	.055	.054	.054	.053
1.8	.161	.107	.085	.073	.066	.061	.057	.055	.053	.051	.050	.049	.048	.046	.046	.045	.045	.044
1.9	.154	.099	.077	.065	.058	.053	.050	.047	.045	.043	.042	.041	.040	.038	.038	.038	.037	.037
2.0	.148	.092	.070	.058	.051	.046	.043	.040	.038	.037	.035	.034	.033	.032	.032	.031	.031	.030
2.1	.141	.085	.063	.052	.045	.040	.037	.034	.033	.031	.030	.029	.028	.027	.027	.026	.025	.025
2.2	.136	.079	.058	.046	.040	.035	.032	.029	.028	.026	.025	.024	.023	.022	.022	.021	.021	.021
2.3	.131	.074	.052	.041	.035	.031	.027	.025	.023	.022	.021	.020	.019	.018	.018	.018	.017	.017
2.4	.126	.069	.048	.037	.031	.027	.024	.022	.020	.019	.018	.017	.016	.015	.015	.014	.014	.014
2.5	.121	.065	.044	.033	.027	.023	.020	.018	.017	.016	.015	.014	.013	.012	.012	.012	.011	.011
2.6	.117	.061	.040	.030	.024	.020	.018	.016	.014	.013	.012	.012	.011	.010	.010	.010	.009	.009
2.7	.113	.057	.037	.027	.021	.018	.015	.014	.012	.011	.010	.010	.009	.008	.008	.008	.008	.007
2.8	.109	.054	.034	.024	.019	.016	.013	.012	.010	.009	.009	.008	.008	.007	.007	.006	.006	.006
2.9	.106	.051	.031	.022	.017	.014	.011	.010	.009	.008	.007	.007	.006	.005	.005	.005	.005	.005
3.0	.102	.048	.029	.020	.015	.012	.010	.009	.007	.007	.006	.006	.005	.004	.004	.004	.004	.004
3.1	.099	.045	.027	.018	.013	.011	.009	.007	.006	.006	.005	.005	.004	.004	.004	.003	.003	.003
3.2	.096	.043	.025	.016	.012	.009	.008	.006	.005	.005	.004	.004	.003	.003	.003	.003	.003	.002
3.3	.094	.040	.023	.015	.011	.008	.007	.005	.005	.004	.004	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.002
3.4	.091	.038	.021	.014	.010	.007	.006	.005	.004	.003	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.002	.002
3.5	.089	.036	.020	.012	.009	.006	.005	.004	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001
3.6	.086	.035	.018	.011	.008	.006	.004	.004	.003	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001
3.7	.084	.033	.017	.010	.007	.005	.004	.003	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001
3.8	.082	.031	.016	.010	.006	.004	.003	.003	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001
3.9	.080	.030	.015	.009	.006	.004	.003	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001
4.0	.078	.029	.014	.008	.005	.004	.003	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000

(continued)

Table A.8 t Curve Tail Areas *(cont.)*



t \ ν	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	35	40	60	120	$\infty(=z)$
0.0	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500
0.1	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.460	.460	.460	.460	.460
0.2	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.421	.421	.421	.421	.421	.421	.421	.421	.421
0.3	.384	.384	.384	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.382	.382
0.4	.347	.347	.347	.347	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.345	.345	.345
0.5	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.310	.310	.310	.310	.310	.309	.309	.309
0.6	.278	.278	.278	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.276	.276	.275	.275	.274
0.7	.246	.246	.246	.246	.245	.245	.245	.245	.245	.245	.245	.245	.244	.244	.243	.243	.242
0.8	.217	.217	.216	.216	.216	.216	.216	.215	.215	.215	.215	.215	.215	.214	.213	.213	.212
0.9	.190	.189	.189	.189	.189	.189	.188	.188	.188	.188	.188	.188	.187	.187	.186	.185	.184
1.0	.165	.165	.164	.164	.164	.164	.163	.163	.163	.163	.163	.163	.162	.162	.161	.160	.159
1.1	.143	.142	.142	.142	.141	.141	.141	.141	.141	.140	.140	.140	.139	.139	.138	.137	.136
1.2	.122	.122	.122	.121	.121	.121	.121	.120	.120	.120	.120	.120	.119	.119	.117	.116	.115
1.3	.105	.104	.104	.104	.103	.103	.103	.103	.102	.102	.102	.102	.101	.101	.099	.098	.097
1.4	.089	.089	.088	.088	.087	.087	.087	.087	.086	.086	.086	.086	.085	.085	.083	.082	.081
1.5	.075	.075	.074	.074	.074	.073	.073	.073	.073	.072	.072	.072	.071	.071	.069	.068	.067
1.6	.063	.063	.062	.062	.062	.061	.061	.061	.061	.060	.060	.060	.059	.059	.057	.056	.055
1.7	.053	.052	.052	.052	.051	.051	.051	.051	.050	.050	.050	.050	.049	.048	.047	.046	.045
1.8	.044	.043	.043	.043	.042	.042	.042	.042	.042	.041	.041	.041	.040	.040	.038	.037	.036
1.9	.036	.036	.036	.035	.035	.035	.035	.034	.034	.034	.034	.034	.033	.032	.031	.030	.029
2.0	.030	.030	.029	.029	.029	.028	.028	.028	.028	.028	.027	.027	.027	.026	.025	.024	.023
2.1	.025	.024	.024	.024	.023	.023	.023	.023	.023	.022	.022	.022	.022	.021	.020	.019	.018
2.2	.020	.020	.020	.019	.019	.019	.019	.018	.018	.018	.018	.018	.017	.017	.016	.015	.014
2.3	.016	.016	.016	.016	.015	.015	.015	.015	.015	.015	.014	.014	.014	.013	.012	.012	.011
2.4	.013	.013	.013	.013	.012	.012	.012	.012	.012	.012	.012	.011	.011	.011	.010	.009	.008
2.5	.011	.011	.010	.010	.010	.010	.010	.010	.009	.009	.009	.009	.009	.008	.008	.007	.006
2.6	.009	.009	.008	.008	.008	.008	.008	.008	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.006	.005	.005
2.7	.007	.007	.007	.007	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.005	.005	.004	.004	.003
2.8	.006	.006	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.004	.004	.004	.003	.003	.003
2.9	.005	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.003	.003	.003	.003	.002	.002
3.0	.004	.004	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.001
3.1	.003	.003	.003	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001
3.2	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001
3.3	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000
3.4	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000
3.5	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000	.000
3.6	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000	.000	.000	.000
3.7	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3.8	.001	.001	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3.9	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
4.0	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000

Table A.9 Critical Values for *F* Distributions

ν_2 = denominator df	α	ν_1 = numerator df: 1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	.100	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86
	.050	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
	.010	4052.20	4999.50	5403.40	5624.60	5763.60	5859.00	5928.40	5981.10	6022.50
	.001	405,284	500,000	540,379	562,500	576,405	585,937	592,873	598,144	602,284
2	.100	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38
	.050	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38
	.010	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39
	.001	998.50	999.00	999.17	999.25	999.30	999.33	999.36	999.37	999.39
3	.100	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24
	.050	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
	.010	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35
	.001	167.03	148.50	141.11	137.10	134.58	132.85	131.58	130.62	129.86
4	.100	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94
	.050	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
	.010	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66
	.001	74.14	61.25	56.18	53.44	51.71	50.53	49.66	49.00	48.47
5	.100	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32
	.050	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
	.010	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16
	.001	47.18	37.12	33.20	31.09	29.75	28.83	28.16	27.65	27.24
6	.100	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96
	.050	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
	.010	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
	.001	35.51	27.00	23.70	21.92	20.80	20.03	19.46	19.03	18.69
7	.100	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72
	.050	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
	.010	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
	.001	29.25	21.69	18.77	17.20	16.21	15.52	15.02	14.63	14.33
8	.100	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56
	.050	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
	.010	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
	.001	25.41	18.49	15.83	14.39	13.48	12.86	12.40	12.05	11.77
9	.100	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44
	.050	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
	.010	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
	.001	22.86	16.39	13.90	12.56	11.71	11.13	10.70	10.37	10.11
10	.100	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35
	.050	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
	.010	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
	.001	21.04	14.91	12.55	11.28	10.48	9.93	9.52	9.20	8.96
11	.100	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27
	.050	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
	.010	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
	.001	19.69	13.81	11.56	10.35	9.58	9.05	8.66	8.35	8.12
12	.100	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21
	.050	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
	.010	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
	.001	18.64	12.97	10.80	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.48

(continued)

Table A.9 Critical Values for *F* Distributions (cont.)

ν_2 = denominator df	α	ν_1 = numerator df: 10	12	15	20	25	30	40	50	60	120	1000
1	.100	60.19	60.71	61.22	61.74	62.05	62.26	62.53	62.69	62.79	63.06	63.30
	.050	241.88	243.91	245.95	248.01	249.26	250.10	251.14	251.77	252.20	253.25	254.19
	.010	6055.80	6106.30	6157.30	6208.70	6239.80	6260.60	6286.80	6302.50	6313.00	6339.40	6362.70
	.001	605,621	610,668	615,764	620,908	624,017	626,099	628,712	630,285	631,337	633,972	636,301
2	.100	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.47	9.48	9.49
	.050	19.40	19.41	19.43	19.45	19.46	19.46	19.47	19.48	19.48	19.49	19.49
	.010	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.48	99.49	99.50
	.001	999.40	999.42	999.43	999.45	999.46	999.47	999.47	999.48	999.48	999.49	999.50
3	.100	5.23	5.22	5.20	5.18	5.17	5.17	5.16	5.15	5.15	5.14	5.13
	.050	8.79	8.74	8.70	8.66	8.63	8.62	8.59	8.58	8.57	8.55	8.53
	.010	27.23	27.05	26.87	26.69	26.58	26.50	26.41	26.35	26.32	26.22	26.14
	.001	129.25	128.32	127.37	126.42	125.84	125.45	124.96	124.66	124.47	123.97	123.53
4	.100	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.80	3.79	3.78	3.76
	.050	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.70	5.69	5.66	5.63
	.010	14.55	14.37	14.20	14.02	13.91	13.84	13.75	13.69	13.65	13.56	13.47
	.001	48.05	47.41	46.76	46.10	45.70	45.43	45.09	44.88	44.75	44.40	44.09
5	.100	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.15	3.14	3.12	3.11
	.050	4.74	4.68	4.62	4.56	4.52	4.50	4.46	4.44	4.43	4.40	4.37
	.010	10.05	9.89	9.72	9.55	9.45	9.38	9.29	9.24	9.20	9.11	9.03
	.001	26.92	26.42	25.91	25.39	25.08	24.87	24.60	24.44	24.33	24.06	23.82
6	.100	2.94	2.90	2.87	2.84	2.81	2.80	2.78	2.77	2.76	2.74	2.72
	.050	4.06	4.00	3.94	3.87	3.83	3.81	3.77	3.75	3.74	3.70	3.67
	.010	7.87	7.72	7.56	7.40	7.30	7.23	7.14	7.09	7.06	6.97	6.89
	.001	18.41	17.99	17.56	17.12	16.85	16.67	16.44	16.31	16.21	15.98	15.77
7	.100	2.70	2.67	2.63	2.59	2.57	2.56	2.54	2.52	2.51	2.49	2.47
	.050	3.64	3.57	3.51	3.44	3.40	3.38	3.34	3.32	3.30	3.27	3.23
	.010	6.62	6.47	6.31	6.16	6.06	5.99	5.91	5.86	5.82	5.74	5.66
	.001	14.08	13.71	13.32	12.93	12.69	12.53	12.33	12.20	12.12	11.91	11.72
8	.100	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.35	2.34	2.32	2.30
	.050	3.35	3.28	3.22	3.15	3.11	3.08	3.04	3.02	3.01	2.97	2.93
	.010	5.81	5.67	5.52	5.36	5.26	5.20	5.12	5.07	5.03	4.95	4.87
	.001	11.54	11.19	10.84	10.48	10.26	10.11	9.92	9.80	9.73	9.53	9.36
9	.100	2.42	2.38	2.34	2.30	2.27	2.25	2.23	2.22	2.21	2.18	2.16
	.050	3.14	3.07	3.01	2.94	2.89	2.86	2.83	2.80	2.79	2.75	2.71
	.010	5.26	5.11	4.96	4.81	4.71	4.65	4.57	4.52	4.48	4.40	4.32
	.001	9.89	9.57	9.24	8.90	8.69	8.55	8.37	8.26	8.19	8.00	7.84
10	.100	2.32	2.28	2.24	2.20	2.17	2.16	2.13	2.12	2.11	2.08	2.06
	.050	2.98	2.91	2.85	2.77	2.73	2.70	2.66	2.64	2.62	2.58	2.54
	.010	4.85	4.71	4.56	4.41	4.31	4.25	4.17	4.12	4.08	4.00	3.92
	.001	8.75	8.45	8.13	7.80	7.60	7.47	7.30	7.19	7.12	6.94	6.78
11	.100	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.04	2.03	2.00	1.98
	.050	2.85	2.79	2.72	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.49	2.45	2.41
	.010	4.54	4.40	4.25	4.10	4.01	3.94	3.86	3.81	3.78	3.69	3.61
	.001	7.92	7.63	7.32	7.01	6.81	6.68	6.52	6.42	6.35	6.18	6.02
12	.100	2.19	2.15	2.10	2.06	2.03	2.01	1.99	1.97	1.96	1.93	1.91
	.050	2.75	2.69	2.62	2.54	2.50	2.47	2.43	2.40	2.38	2.34	2.30
	.010	4.30	4.16	4.01	3.86	3.76	3.70	3.62	3.57	3.54	3.45	3.37
	.001	7.29	7.00	6.71	6.40	6.22	6.09	5.93	5.83	5.76	5.59	5.44

(continued)

Table A.9 Critical Values for *F* Distributions (*cont.*)

ν_2 = denominator df	α	ν_1 = numerator df: 1	2	3	4	5	6	7	8	9
13	.100	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16
	.050	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
	.010	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19
	.001	17.82	12.31	10.21	9.07	8.35	7.86	7.49	7.21	6.98
14	.100	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12
	.050	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
	.010	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03
	.001	17.14	11.78	9.73	8.62	7.92	7.44	7.08	6.80	6.58
15	.100	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09
	.050	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
	.010	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
	.001	16.59	11.34	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.26
16	.100	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06
	.050	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
	.010	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78
	.001	16.12	10.97	9.01	7.94	7.27	6.80	6.46	6.19	5.98
17	.100	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03
	.050	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
	.010	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68
	.001	15.72	10.66	8.73	7.68	7.02	6.56	6.22	5.96	5.75
18	.100	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00
	.050	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
	.010	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60
	.001	15.38	10.39	8.49	7.46	6.81	6.35	6.02	5.76	5.56
19	.100	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98
	.050	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
	.010	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52
	.001	15.08	10.16	8.28	7.27	6.62	6.18	5.85	5.59	5.39
20	.100	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96
	.050	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
	.010	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
	.001	14.82	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.24
21	.100	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95
	.050	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37
	.010	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40
	.001	14.59	9.77	7.94	6.95	6.32	5.88	5.56	5.31	5.11
22	.100	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93
	.050	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
	.010	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35
	.001	14.38	9.61	7.80	6.81	6.19	5.76	5.44	5.19	4.99
23	.100	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92
	.050	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32
	.010	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30
	.001	14.20	9.47	7.67	6.70	6.08	5.65	5.33	5.09	4.89
24	.100	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91
	.050	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
	.010	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
	.001	14.03	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.80

(continued)

Table A.9 Critical Values for *F* Distributions (*cont.*)

ν_2 = denominator df	α	ν_1 = numerator df: 10	12	15	20	25	30	40	50	60	120	1000
13	.100	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.92	1.90	1.88	1.85
	.050	2.67	2.60	2.53	2.46	2.41	2.38	2.34	2.31	2.30	2.25	2.21
	.010	4.10	3.96	3.82	3.66	3.57	3.51	3.43	3.38	3.34	3.25	3.18
	.001	6.80	6.52	6.23	5.93	5.75	5.63	5.47	5.37	5.30	5.14	4.99
14	.100	2.10	2.05	2.01	1.96	1.93	1.91	1.89	1.87	1.86	1.83	1.80
	.050	2.60	2.53	2.46	2.39	2.34	2.31	2.27	2.24	2.22	2.18	2.14
	.010	3.94	3.80	3.66	3.51	3.41	3.35	3.27	3.22	3.18	3.09	3.02
	.001	6.40	6.13	5.85	5.56	5.38	5.25	5.10	5.00	4.94	4.77	4.62
15	.100	2.06	2.02	1.97	1.92	1.89	1.87	1.85	1.83	1.82	1.79	1.76
	.050	2.54	2.48	2.40	2.33	2.28	2.25	2.20	2.18	2.16	2.11	2.07
	.010	3.80	3.67	3.52	3.37	3.28	3.21	3.13	3.08	3.05	2.96	2.88
	.001	6.08	5.81	5.54	5.25	5.07	4.95	4.80	4.70	4.64	4.47	4.33
16	.100	2.03	1.99	1.94	1.89	1.86	1.84	1.81	1.79	1.78	1.75	1.72
	.050	2.49	2.42	2.35	2.28	2.23	2.19	2.15	2.12	2.11	2.06	2.02
	.010	3.69	3.55	3.41	3.26	3.16	3.10	3.02	2.97	2.93	2.84	2.76
	.001	5.81	5.55	5.27	4.99	4.82	4.70	4.54	4.45	4.39	4.23	4.08
17	.100	2.00	1.96	1.91	1.86	1.83	1.81	1.78	1.76	1.75	1.72	1.69
	.050	2.45	2.38	2.31	2.23	2.18	2.15	2.10	2.08	2.06	2.01	1.97
	.010	3.59	3.46	3.31	3.16	3.07	3.00	2.92	2.87	2.83	2.75	2.66
	.001	5.58	5.32	5.05	4.78	4.60	4.48	4.33	4.24	4.18	4.02	3.87
18	.100	1.98	1.93	1.89	1.84	1.80	1.78	1.75	1.74	1.72	1.69	1.66
	.050	2.41	2.34	2.27	2.19	2.14	2.11	2.06	2.04	2.02	1.97	1.92
	.010	3.51	3.37	3.23	3.08	2.98	2.92	2.84	2.78	2.75	2.66	2.58
	.001	5.39	5.13	4.87	4.59	4.42	4.30	4.15	4.06	4.00	3.84	3.69
19	.100	1.96	1.91	1.86	1.81	1.78	1.76	1.73	1.71	1.70	1.67	1.64
	.050	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00	1.98	1.93	1.88
	.010	3.43	3.30	3.15	3.00	2.91	2.84	2.76	2.71	2.67	2.58	2.50
	.001	5.22	4.97	4.70	4.43	4.26	4.14	3.99	3.90	3.84	3.68	3.53
20	.100	1.94	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.71	1.69	1.68	1.64	1.61
	.050	2.35	2.28	2.20	2.12	2.07	2.04	1.99	1.97	1.95	1.90	1.85
	.010	3.37	3.23	3.09	2.94	2.84	2.78	2.69	2.64	2.61	2.52	2.43
	.001	5.08	4.82	4.56	4.29	4.12	4.00	3.86	3.77	3.70	3.54	3.40
21	.100	1.92	1.87	1.83	1.78	1.74	1.72	1.69	1.67	1.66	1.62	1.59
	.050	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.92	1.87	1.82
	.010	3.31	3.17	3.03	2.88	2.79	2.72	2.64	2.58	2.55	2.46	2.37
	.001	4.95	4.70	4.44	4.17	4.00	3.88	3.74	3.64	3.58	3.42	3.28
22	.100	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.65	1.64	1.60	1.57
	.050	2.30	2.23	2.15	2.07	2.02	1.98	1.94	1.91	1.89	1.84	1.79
	.010	3.26	3.12	2.98	2.83	2.73	2.67	2.58	2.53	2.50	2.40	2.32
	.001	4.83	4.58	4.33	4.06	3.89	3.78	3.63	3.54	3.48	3.32	3.17
23	.100	1.89	1.84	1.80	1.74	1.71	1.69	1.66	1.64	1.62	1.59	1.55
	.050	2.27	2.20	2.13	2.05	2.00	1.96	1.91	1.88	1.86	1.81	1.76
	.010	3.21	3.07	2.93	2.78	2.69	2.62	2.54	2.48	2.45	2.35	2.27
	.001	4.73	4.48	4.23	3.96	3.79	3.68	3.53	3.44	3.38	3.22	3.08
24	.100	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.62	1.61	1.57	1.54
	.050	2.25	2.18	2.11	2.03	1.97	1.94	1.89	1.86	1.84	1.79	1.74
	.010	3.17	3.03	2.89	2.74	2.64	2.58	2.49	2.44	2.40	2.31	2.22
	.001	4.64	4.39	4.14	3.87	3.71	3.59	3.45	3.36	3.29	3.14	2.99

(continued)

6017

Table A.9 Critical Values for *F* Distributions (cont.)

ν_2 = denominator df	α	ν_1 = numerator df: 1	2	3	4	5	6	7	8	9
25	.100	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89
	.050	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28
	.010	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22
	.001	13.88	9.22	7.45	6.49	5.89	5.46	5.15	4.91	4.71
26	.100	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88
	.050	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
	.010	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18
	.001	13.74	9.12	7.36	6.41	5.80	5.38	5.07	4.83	4.64
27	.100	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87
	.050	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25
	.010	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15
	.001	13.61	9.02	7.27	6.33	5.73	5.31	5.00	4.76	4.57
28	.100	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87
	.050	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
	.010	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12
	.001	13.50	8.93	7.19	6.25	5.66	5.24	4.93	4.69	4.50
29	.100	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86
	.050	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22
	.010	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09
	.001	13.39	8.85	7.12	6.19	5.59	5.18	4.87	4.64	4.45
30	.100	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85
	.050	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
	.010	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
	.001	13.29	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.82	4.58	4.39
40	.100	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79
	.050	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
	.010	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
	.001	12.61	8.25	6.59	5.70	5.13	4.73	4.44	4.21	4.02
50	.100	2.81	2.41	2.20	2.06	1.97	1.90	1.84	1.80	1.76
	.050	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07
	.010	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78
	.001	12.22	7.96	6.34	5.46	4.90	4.51	4.22	4.00	3.82
60	.100	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74
	.050	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
	.010	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
	.001	11.97	7.77	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3.86	3.69
100	.100	2.76	2.36	2.14	2.00	1.91	1.83	1.78	1.73	1.69
	.050	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97
	.010	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59
	.001	11.50	7.41	5.86	5.02	4.48	4.11	3.83	3.61	3.44
200	.100	2.73	2.33	2.11	1.97	1.88	1.80	1.75	1.70	1.66
	.050	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93
	.010	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50
	.001	11.15	7.15	5.63	4.81	4.29	3.92	3.65	3.43	3.26
1000	.100	2.71	2.31	2.09	1.95	1.85	1.78	1.72	1.68	1.64
	.050	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89
	.010	6.66	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43
	.001	10.89	6.96	5.46	4.65	4.14	3.78	3.51	3.30	3.13

(continued)

Table A.9 Critical Values for *F* Distributions (cont.)

ν_2 = denominator df	α	ν_1 = numerator df: 10	12	15	20	25	30	40	50	60	120	1000
25	.100	1.87	1.82	1.77	1.72	1.68	1.66	1.63	1.61	1.59	1.56	1.52
	.050	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.84	1.82	1.77	1.72
	.010	3.13	2.99	2.85	2.70	2.60	2.54	2.45	2.40	2.36	2.27	2.18
	.001	4.56	4.31	4.06	3.79	3.63	3.52	3.37	3.28	3.22	3.06	2.91
26	.100	1.86	1.81	1.76	1.71	1.67	1.65	1.61	1.59	1.58	1.54	1.51
	.050	2.22	2.15	2.07	1.99	1.94	1.90	1.85	1.82	1.80	1.75	1.70
	.010	3.09	2.96	2.81	2.66	2.57	2.50	2.42	2.36	2.33	2.23	2.14
	.001	4.48	4.24	3.99	3.72	3.56	3.44	3.30	3.21	3.15	2.99	2.84
27	.100	1.85	1.80	1.75	1.70	1.66	1.64	1.60	1.58	1.57	1.53	1.50
	.050	2.20	2.13	2.06	1.97	1.92	1.88	1.84	1.81	1.79	1.73	1.68
	.010	3.06	2.93	2.78	2.63	2.54	2.47	2.38	2.33	2.29	2.20	2.11
	.001	4.41	4.17	3.92	3.66	3.49	3.38	3.23	3.14	3.08	2.92	2.78
28	.100	1.84	1.79	1.74	1.69	1.65	1.63	1.59	1.57	1.56	1.52	1.48
	.050	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.79	1.77	1.71	1.66
	.010	3.03	2.90	2.75	2.60	2.51	2.44	2.35	2.30	2.26	2.17	2.08
	.001	4.35	4.11	3.86	3.60	3.43	3.32	3.18	3.09	3.02	2.86	2.72
29	.100	1.83	1.78	1.73	1.68	1.64	1.62	1.58	1.56	1.55	1.51	1.47
	.050	2.18	2.10	2.03	1.94	1.89	1.85	1.81	1.77	1.75	1.70	1.65
	.010	3.00	2.87	2.73	2.57	2.48	2.41	2.33	2.27	2.23	2.14	2.05
	.001	4.29	4.05	3.80	3.54	3.38	3.27	3.12	3.03	2.97	2.81	2.66
30	.100	1.82	1.77	1.72	1.67	1.63	1.61	1.57	1.55	1.54	1.50	1.46
	.050	2.16	2.09	2.01	1.93	1.88	1.84	1.79	1.76	1.74	1.68	1.63
	.010	2.98	2.84	2.70	2.55	2.45	2.39	2.30	2.25	2.21	2.11	2.02
	.001	4.24	4.00	3.75	3.49	3.33	3.22	3.07	2.98	2.92	2.76	2.61
40	.100	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.48	1.47	1.42	1.38
	.050	2.08	2.00	1.92	1.84	1.78	1.74	1.69	1.66	1.64	1.58	1.52
	.010	2.80	2.66	2.52	2.37	2.27	2.20	2.11	2.06	2.02	1.92	1.82
	.001	3.87	3.64	3.40	3.14	2.98	2.87	2.73	2.64	2.57	2.41	2.25
50	.100	1.73	1.68	1.63	1.57	1.53	1.50	1.46	1.44	1.42	1.38	1.33
	.050	2.03	1.95	1.87	1.78	1.73	1.69	1.63	1.60	1.58	1.51	1.45
	.010	2.70	2.56	2.42	2.27	2.17	2.10	2.01	1.95	1.91	1.80	1.70
	.001	3.67	3.44	3.20	2.95	2.79	2.68	2.53	2.44	2.38	2.21	2.05
60	.100	1.71	1.66	1.60	1.54	1.50	1.48	1.44	1.41	1.40	1.35	1.30
	.050	1.99	1.92	1.84	1.75	1.69	1.65	1.59	1.56	1.53	1.47	1.40
	.010	2.63	2.50	2.35	2.20	2.10	2.03	1.94	1.88	1.84	1.73	1.62
	.001	3.54	3.32	3.08	2.83	2.67	2.55	2.41	2.32	2.25	2.08	1.92
100	.100	1.66	1.61	1.56	1.49	1.45	1.42	1.38	1.35	1.34	1.28	1.22
	.050	1.93	1.85	1.77	1.68	1.62	1.57	1.52	1.48	1.45	1.38	1.30
	.010	2.50	2.37	2.22	2.07	1.97	1.89	1.80	1.74	1.69	1.57	1.45
	.001	3.30	3.07	2.84	2.59	2.43	2.32	2.17	2.08	2.01	1.83	1.64
200	.100	1.63	1.58	1.52	1.46	1.41	1.38	1.34	1.31	1.29	1.23	1.16
	.050	1.88	1.80	1.72	1.62	1.56	1.52	1.46	1.41	1.39	1.30	1.21
	.010	2.41	2.27	2.13	1.97	1.87	1.79	1.69	1.63	1.58	1.45	1.30
	.001	3.12	2.90	2.67	2.42	2.26	2.15	2.00	1.90	1.83	1.64	1.43
1000	.100	1.61	1.55	1.49	1.43	1.38	1.35	1.30	1.27	1.25	1.18	1.08
	.050	1.84	1.76	1.68	1.58	1.52	1.47	1.41	1.36	1.33	1.24	1.11
	.010	2.34	2.20	2.06	1.90	1.79	1.72	1.61	1.54	1.50	1.35	1.16
	.001	2.99	2.77	2.54	2.30	2.14	2.02	1.87	1.77	1.69	1.49	1.22

[This question paper contains 10 printed pages.]

15

2017

Your Roll No.....

DESHBANDHU COLLEGE LIBRARY Kalkaji, New Delhi-19

Sr. No. of Question Paper : 6018 G

Unique Paper Code : 227203

Name of the Paper : Mathematical Methods for Economics-II

Name of the Course : **B.A. (Honours) Economics**

Semester : II

Duration : 3 Hours Maximum Marks : 75

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. Answer all questions. Choice is available within each question. Use of simple calculator is permitted.
3. Answers may be written either in English or in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

छात्रों के लिए निर्देश

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए ।
2. सभी पाँच प्रश्नों का उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के भीतर चयन उपलब्ध है। साधारण कैल्कुलेटर के प्रयोग की अनुमती है।
3. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए ।

P.T.O.

1. Attempt any four from parts (a) to (e) in this question. (6×4)

(a) (i) Show that for matrices P and Q, if $PQ = P$ and $QP = Q$, then P and Q are both idempotent.

(ii) Show that if P is idempotent then $P^n = P$ for all positive integers n.

(b) Find the equation of the plan P in R3 containing the three points $a = (1,3,1)$, $b = (-1,3,4)$ and $c = (2,3,-2)$. Find the unit vector normal to this plane.

(c) For what values of the numbers a, b and c does the following system of equations have solutions? Find the solutions when they exist.

$$X_1 - 2X_2 + X_3 + 2X_4 = a$$

$$X_1 + X_2 - X_3 + X_4 = b$$

$$X_1 + 7X_2 - 5X_3 + X_4 = c$$

(d) Let A be a $r \times s$ matrix such that $r < s$. What is the rank of A if :

(i) Rows of A are linearly independent;

(ii) Rows of A are not linearly independent;

(iii) Columns of A are not linearly independent.

(e) For vectors u and v, prove the following:

(i) $||u-v|| \leq ||u|| + ||v||$

(ii) $||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2$

इस प्रश्न में भागों (a) से (e) में से किन्हीं चार के उत्तर दीजिए

(क) (i) आव्यूहों (matrices) P व Q हेतु दर्शाइए कि यदि $PQ = P$ तथा $QP = Q$, तो P व Q दोनों आइडेम्पोटेण्ड (idempotent) हैं।

(ii) दर्शाइए कि यदि P (idempotent) है तो सभी धनात्मक पूर्णांकों (integers) n हेतु $P^n = P$.

(ख) $\Re^3$ में उस समतल (*plane*) P का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसमें तीन बिन्दु $a = (1,3,1)$, $b = (-1,3,4)$ व $c = (2,3,-2)$ स्थित हों। इस समतल के लम्बवत् इकाई सदिश भी ज्ञात कीजिए।

(ग) संख्याओं a, b व c के किन मानों हेतु निम्नलिखित समीकरण निकाय के हलों का अस्तित्व होगा? जब हलों का अस्तित्व हो तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

$$X_1 - 2X_2 + X_3 + 2X_4 = a$$

$$X_1 + X_2 - X_3 + X_4 = b$$

$$X_1 + 7X_2 - 5X_3 + X_4 = c$$

(घ) मान लीजिए कि A, इस प्रकार का $r \times s$ आव्यूह है कि $r < s$. A की कोटि (rank) क्या होगी यदि :

(i) A की पंक्तियाँ रैखिकत: (linearly) स्वतन्त्र हैं;

(ii) A की पंक्तियाँ रैखिकत: (linearly) स्वतन्त्र नहीं हैं;

(iii) A के स्तम्भ रैखिकत: (linearly) स्वतन्त्र नहीं है।

(ङ) सदिशों (vectors) u व v, हेतु निम्नलिखित हो सिद्ध कीजिए:

(i) $||u-v|| \leq ||u|| + ||v||$

(ii) $||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2$

2. Attempt any two from parts (a) to (c) in this question. (4×2)

(a) Solve the differential equation $y^4 \frac{dy}{dt} = 1-t$. Find the intergral curve through (t, y) = (1, 1).

(b) Use the definition of a convex set to prove/disprove that the set $S = \{(x, y) \in \Re \mid x \geq 0, y \geq 0, xy \leq 4\}$ is a convex set.

(c) For the differential equation $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$, draw a phase diagram to mark out the equlibrium state(s). Comment on the stability of the equilibrium.

इस प्रश्न के भागों (a) से (c) में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिए।

(क) अवकल समीकरण $y^4 \frac{dy}{dt} = 1-t$ को हल कीजिए। $(t, y) =$ (1, 1) से गुजरने वाला समाकल वक्र (integral curve) ज्ञात कीजिए।

(ख) अभिसारी समुच्चय (convex set) की परिभाषा की सहायता से निम्नलिखित कथन को सिद्ध या गलत सिद्ध कीजिए : समुच्चय $S = \{(x, y) \in \Re \mid x \geq 0, y \geq 0, xy \leq 4\}$ एक अभिसारी समुच्चय है।

(ग) अवकल समीकरण $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ हेतु साम्यावस्था(ओं) को चिन्हित करते हुए प्रावस्था वक्र (phase diagram) बनाइए। साम्यावस्था के स्थायित्व पर टिप्पणी कीजिए।

3. Attempt any two from parts (a) to (c) in this question (6x2)

(a) (i) Find the domain of the function $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-4}} + \sqrt{3y - x^2 + 9}$. Also provide a sketch of the domain.

(ii) Find the degree of homegeneity of the funciton $g(x,y)=\frac{e^{\ln f(x,y)}}{x^3+y^3}$, if it is given that is homogeneous of degree one.

(b) For the function $f(x, y)= y^2 - e^{2x}$,

(i) Find the maximum value of its directional derivative at (2,–1) and the unit vector in that direction.

(ii) calculate the partial elasticities of $f(x, y)$ with respect to x and y.

(c) (i) Given that $P = P(x, y)$ and $z = \ln(xy + yP)$, express dz (the differential of z) in terms of dx and dy.

(ii) The equation $x^y + y^z + z^x = m$, where m is a positive constant, defines z as a function of x and y for $x > 0$ and $y > 0$. Compute the partial derivative of z with respect to y.

इस प्रश्न में भागों (a) से (c) में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिए।

(क) (i) फलन $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-4}}+\sqrt{3y-x^2+9}$ का परास (domain) ज्ञात कीजिए। परास का एक रेखाचित्र (sketch) भी दीजिए।

(ii) यदि यह दिया हुआ है कि f कोटि एक का समघात (homogeneous of degree one) है, तो $g(x,y)=\frac{e^{\ln f(x,y)}}{x^3+y^3}$ की समघातता की कोटि (degree of homogeneity) ज्ञात कीजिए।

(ख) फलन $f(x, y)= y^2 - e^{2x}$ हेतु,

(i) (2, –1) पर इसके दिशात्मक अवकलज (directional derivative) का अधिकतम मान व उस दिशा में इकाई सदेश ज्ञात कीजिए।

(ii) $f(x,y)$ की x व y के सापेक्ष आंशिक लोचें (partial elasticities) ज्ञात कीजिए।

(ग) (i) दिया हुआ है कि $P = P(x, y)$ व $z = \ln(xy + yP)$, तो dz (z के अवकल को) dx व dy के पदों में व्यक्त कीजिए।

(ii) समीकरण $x^y + y^z + z^x = m$ जहाँ m एक धनात्मक स्थिरांक है, $x > 0$ व $y > 0$ हेतु z को x व y के एक फलन के रूप में परिभाषित करता है। z के y के सापेक्ष अवकलज की गणना कीजिए।

4. Attempt any **two** from parts (a) to (c) in this question. (5x2)

(a) Find the equation of the tangent plane to the surface $z = xy^3 - 2x^3$ at the point (2,3,38). Also approximate the value of the function using a linear approximation when the values of x and y equal to 2.01 and 2.98 respectively.

(b) Calculate the elasticity of substitution between y and x for $f(x,y) = 10x^2 + 15y^2$.

(c) Determine which of the following functions are concave/ convex?

(i) $g(x,y,z) = x^2 - y^2 - 3z^2 + xy - 2xz - yz$

(ii) $f(x,y) = 6x^{1/3}y^{1/2}$

इस प्रश्न पत्र में भागों (a) से (c) में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिए।

(क) सतह (surface) $z = xy^3 - 2x^3$ के बिन्दु (2,3,38) पर स्पर्शी समतल (tangent plane) का समीकरण ज्ञात कीजिए। जब x व y क्रमश: 2.01 व 2.98 के बराबर हों तो रेखीय सन्निकटन (linear approximation) की सहायता से इस फलन का सन्निकट मान भी ज्ञात कीजिए।

(ख) $f(x,y) = 10x^2 + 15y^2$ हेतु y व x के मध्य प्रतिस्थापन की लोच (elasticity of substitution) की गणना कीजिए।

(ग) निम्नलिखित में से कौन-से फलन अवतल(concave)/उत्तल (convex) हैं, निर्धारित कीजिए:

(i) $g(x,y,z) = x^2 - y^2 - 3z^2 + xy - 2xz - yz$

(ii) $f(x,y) = 6x^{1/3}y^{1/2}$

5. Attempt any three from parts (a) to (d) in this question. (7x3)

(a) Find the maximum and/or minimum value of $z = 2x - 6y - 2xy$ such that $3x + 3y = 18$. Find the rate of change in the value of z calculated above. due to a slight relaxation of the constraint constant.

(b) $u = x^a y^b$ is a consumer's utility function for two goods. Find the utility maximising demand of the two goods if the prices of the goods are p_x and p_Y and m is the income of the consumer. What is the rate of change in the maximal value of utility when p_y falls?

(c) The demand for two products is determined by the equation: $p = 25 - x$ and $q = 24 - 2y$ where p and q are prices and x and y are the number of units of the two goods respectively. The cost of producing x and y is given by the function $C(x, y) = 3x^2 + 3xy + y^2$. If a single firm obtains the revenue from selling the products and bears the entire cost, find x and y for maximum profit.

(d) Find and classify all the stationary points of the functio $g(x,y) = x^4y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2$.

इस कथन मे भागों (a) से (d) में से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिए।

(क) $3x + 3y = 18$ के अधीन, $z = 2x - 6y - 2xy$ का अधिकतम तथा/अथवा न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए। बाध्यता स्थिरांक (constraint constant) में मामूली शिशिलता के कारण z के ऊपर निकाले मान में परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

(ख) $u = x^a y^b$ दो वस्तुओं हेतु एक उपभोक्ता का उपयोगिता फलन है। यदि वस्तुओं की कीमतें P_x व P_y हैं तथा m उपभोक्ता की आय है तो अधिकतम उपयोगिता में इन दो वस्तुओं की मांग ज्ञात कीजिए। जब P_y में गिरावट होती है तो उपयोगिता के मान में परिवर्तन कर दर क्या होगी?

(ग) दो उत्पादों हेतु मांग समीकरणों : $p = 25–x$ and $q = 24–2y$ द्वारा निर्धारित होती हैं जहाँ p व q तथा x व y क्रमशः इन वस्तुओं की कीमतें व इकाइयों की संख्याएँ हैं। x व y को बनाने की लागत, फलन $C(x, y) = 3x^2 + 3xy + y^2$ द्वारा दी जाती हैं। यदि एक एकल फर्म इन उत्पादों का बेचकर सम्पूर्ण राजस्व प्राप्त करती है तथा सम्पूर्ण लागत वहन करती है, तो अधिकतम लाभ हेतु x व y ज्ञात कीजिए।

(घ) फलन $g(x,y) = x^4y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2$ के सभी स्थिर बिन्दुओं (stationary points) ज्ञात कीजिए व वर्गीकृत कीजिए।